série de matemática

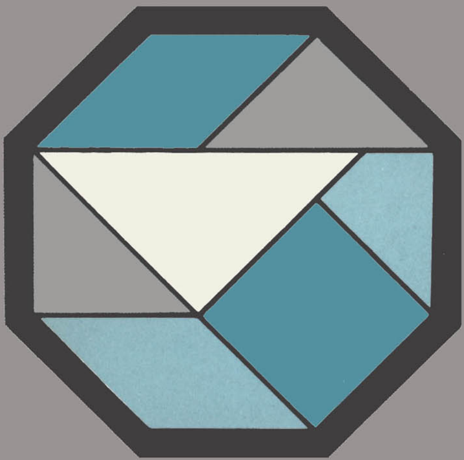
monografía no. 10

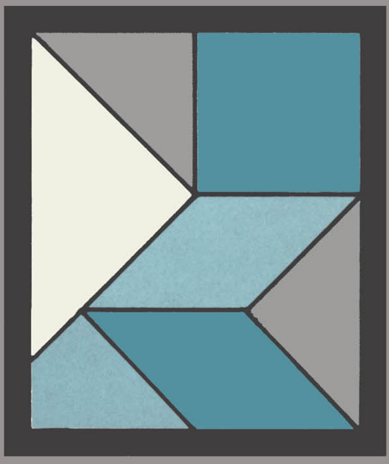
FUNÇÕES REAIS

Programa Regional de Desenvolvimiento Científico e Tecnológico

Departamento de Assuntos Científicos

Secretaria-Geral de Organização dos Estados Americanos





FUNÇÕES REAIS

por

DJAIRO G. DE FIGUEIREDO

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro, Gb, Brasil

e

Universidade de Illinois
Chicago, Ill., Estados Unidos

Departamento de Assuntos Científicos
Secretaria-Geral
Organização dos Estados Americanos
Washington, D.C. - 1970

Esta monografia foi preparada para publicação no
Departamento de Assuntos Científicos da União Pan-Americana

Coordenadora da Série: Eva V. Chesneau
Assessor Técnico: Dr. Geraldo Avila
Universidade de Georgetown
Washington, D.C.

Ao meu pai

"Criou-me, desde eu menino,

Para arquiteto meu pai.

Fiz-me arquiteto? Não pude!

Sou poeta menor, perdoai! "

(Manuel Bandeira)

AOS LEITORES

O programa de monografias científicas é um aspecto do amplo trabalho da Organização dos Estados Americanos, sob a responsabilidade do Departamento de Assuntos Científicos da Secretaria-Geral, para cujo financiamento contribui de maneira substancial o Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

Concebido pelos Chefes de Estado Americanos em sua reunião levada a efeito em Punta del Este, Uruguai, em 1967, e estruturado nos têrmos das deliberações e mandatos da Quinta Reunião do Conselho Cultural Interamericano, realizada em Maracay, Venezuela, em 1968, o Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico expressa as aspirações dos Chefes de Estado Americanos no sentido de pôr a ciência e a tecnologia a serviço dos povos latino-americanos.

Demonstrando grande visão, aquelas altas autoridades reconheceram que a ciência e a tecnologia estão transformando a estrutura econômica e social de muitos países e que, no momento, por serem instrumentos indispensáveis do progresso da América Latina, necessitam de um impulso sem precedente.

O Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico é um complemento dos esforços nacionais dos países latino-americanos e orienta-se no sentido da adoção de medidas que permitam o desenvolvimento da pesquisa, do ensino e da difusão da ciência e da tecnologia; a formação e aperfeiçoamento de pessoal científico; o intercâmbio de informações; e a transferência e adaptação aos países latinoamericanos do conhecimento e das tecnologias oriundas de outras regiões.

No cumprimento dessas metas fundamentais, o programa de monografias representa uma contribuição direta para o ensino das ciências em níveis educacionais que abrangem importantíssimos setores da população e, ao mesmo tempo, concorre para a divulgação do saber científico.

A coleção de monografias científicas consta de quatro séries, em espanhol e em português, sôbre temas de física, química, biologia e matemática. Desde o comêço, destinaram-se as monografias a professôres e alunos de ciência do ensino médio e dos primeiros anos do ensino superior. De uns e de outros já se tem recebido testemunho do bom acolhimento a elas dispensado.

Êste prefácio proporciona oportunidade ao Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico e à Secretaria-Geral da Organização dos Estados Americanos para expressarem seus agradecimentos ao Doutor Djairo G. de Figueiredo, autor desta monografia, e a tôdas as pessoas que com interêsse e boa vontade contribuam para sua divulgação.

Abril de 1970

ÍNDICE

PREFÁCIO

A presente monografia não é um livro de cálculo diferencial e integral no sentido usual. Contém os conceitos fundamentais da matéria expostos em base rigorosa, mas acessível. É, digamos, uma iniciação à análise. O trabalho não se destina a principiantes. Para êsses existem vários textos excelentes elaborados com mais detalhes, apresentando maior número de exemplos e contendo longas listas de exercícios, que são essenciais para um aprendizado sólido. Julgamos que o presente texto será de valia para professôres de matemática, do fim do curso médio ou dos primeiros anos universitários, que queiram ver ràpidamente uma formalização das várias técnicas e conceitos com que lidam. Apesar de auto-suficiente, o texto presume que o leitor já possui alguma experiência nas técnicas do cálculo diferencial e integral. Em caso de não a possuir, sugerimos que lance mão de um livro de cálculo e faça exercícios.

Desejamos expressar nossos agradecimentos à Organização dos Estados Americanos por nos convidar a escrever a presente monografia. Ao Professor Elon Lima, nossa gratidão por dedicar parte do seu retiro espiritual de Armação dos Búzios à leitura de certos capítulos do texto e pelas valiosas sugestões que nos ofereceu. Agradecemos, também, ao Professor Geraldo Avila pela leitura crítica do manuscrito e pelas excelentes observações, e à Maruja, que abrindo mão de tantos fins de semana, possibilitou a realização dêste trabalho!

1

OS NÚMEROS REAIS

1.1. CONJUNTOS E FUNÇÕES

Os conceitos de conjunto e função pertencem aos fundamentos da matemática moderna. Portanto, ao iniciar o nosso trabalho, sentimos a necessidade de fazer algumas considerações sôbre tais conceitos a fim de evitar seu uso inadequado posteriormente.

A formalização da teoria dos conjuntos em um contexto lògicamente rigoroso é obra de grandes matemáticos dêste e do século passado. As contribuições de Cantor, Hilbert e Gödel são decisivas e profundas. Mencionamos também o nome do matemático contemporâneo, Paul Cohen, que fêz uma contribuição extremamente importante à teoria dos conjuntos.

No presente trabalho, não utilizamos nenhum dos aspectos delicados da teoria dos conjuntos. Na verdade, necessitamos apenas definir alguns têrmos. A palavra *conjunto* é usada para designar uma coleção qualquer de objetos. Por exemplo, o conjunto das carteiras em uma sala de aula, o conjunto das crianças menores de 10 anos, o conjunto dos números pares. Lidaremos, em geral, com *conjuntos numéricos*, isto é, conjuntos constituídos por números. Como, por exemplo: o conjunto $\mathbf{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbf{R}$ dos números reais, o conjunto $\mathbf{R}^+$ dos números reais positivos, etc. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que consideramos a noção de conjunto como primitiva e que, portanto, não é passível de definição.

Os objetos que constituem um dado conjunto são chamados os *elementos* do conjunto. Usamos a notação $x \in A$ para dizer que um elemento x está em um conjunto A, e lê-se x "pertence a" A. Uma propriedade P caracteriza um conjunto A, se todo elemento de A satisfaz à propriedade P e se, recìprocamente, todo elemento que satisfaz à propriedade P pertence ao conjunto. Via de regra, um conjunto é dado através de propriedades que o caracterizam.

Por exemplo: $\mathbf{R}^+$ é o conjunto dos elementos x de $\mathbf{R}$ tais que $x > 0$, ou, em símbolos

$$\mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}.$$

Cada parte B de um conjunto A é chamado um *subconjunto de* A. Mais precisamente, B é um subconjunto de A (em símbolos, $B \subset A$ ou $A \supset B$) se todo $x \in B$ é tal que $x \in A$. A expressão $B \subset A$ lê-se B "contido em" A e $A \supset B$ lê-se A "contém" B.

Usamos as seguintes notações: $A \cup B$ para designar o conjunto dos elementos que estão em A ou em B; $A \cap B$ para designar o conjunto dos elementos que estão simultâneamente em A e em B; $A \setminus B$ para designar o conjunto dos elementos que estão em A mas não em B.

Uma *função* f de um conjunto A em um conjunto B é uma regra que a cada elemento $x \in A$ associa um elemento $f(x)$ em B. $f(x)$ é chamado o *valor* de f no elemento x. O conjunto A é chamado o *campo de definição* (conhecido também por *domínio*) da função f, e o conjunto B é chamado o *contradomínio*. Usamos a seguinte definição que explicita o domínio e o contradomínio da função: $f\colon A \to B$. Não é demais repetir que, dada uma função $f: A \to B$, o valor da função em um elemento $x \in A$ é unìvocamente determinado.

4 Exemplos de Funções

(i) $A = B = \mathbf{R}$ e $f(x) = x^2$, isto é, a função que a cada real x associa o seu quadrado x^2.

(ii) $A = B = \mathbf{R}^+$ e $f(x) = +\sqrt{x}$, isto é, a função que a cada real positivo x associa sua raiz quadrada positiva.

(iii) $A = \mathbf{R}^+$, $B = \mathbf{R}$ e $f(x) = -\sqrt{x}$, isto é, a função que a cada real positivo x associa sua raiz quadrada negativa.

(iv) $A = B = \mathbf{R}$ e

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{para} \quad x > 0 \\ 1, & \text{para} \quad x = 0 \\ x^3, & \text{para} \quad x < 0 \end{cases}$$

(v) $A = B = \mathbf{R}^+$ e $f(x) = 1/(1 + x)$.

(vi) (A função de Dirichlet). $A = B = \mathbf{R}$ e f a função que a cada racional associa o número 0, e a cada irracional associa o número 1.

Uma função entre conjuntos numéricos não é necessàriamente definida por uma fórmula algébrica, cf. exemplos (iv) e (vi) acima.

Dada uma função $f: A \to B$, o conjunto dos elementos y de B tais que existe (pelo menos) um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, é chamado a *imagem de* A pela função f, e é designado por $f(A)$.

A imagem do domínio pela f não é necessàriamente o contra-domínio todo, cf. exemplos (i), (iii), (iv), (v), (vi) acima. No exemplo (ii), a imagem do domínio coincide com o contradomínio. Uma função $f: A \to B$ tal que $f(A) = B$ é dita uma *sobrejeção*, ou uma *função sobrejetiva*.

Elementos distintos do domínio de uma função f podem ter o mesmo valor no contradomínio. Em outras palavras, pode-se ter a seguinte situação: $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. No exemplo acima (i), a função $f(x) = x^2$ tem o mesmo valor nos pontos 1 e -1. No exemplo (vi) todos os racionais vão no mesmo ponto pela função de Dirichlet. Uma função f que leve elementos distintos em valôres distintos é chamada uma *injeção* ou uma *função injetiva*. Em outras palavras, $f: A \to B$ é uma injeção se, para todo par de pontos x_1 e x_2 em A tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$. As funções (ii), (iii), (v) acima são injetivas.

Uma função que é, ao mesmo tempo, uma injeção e uma sobrejeção é dita uma *bijeção* ou uma *função bijetiva*. A função (ii) acima é bijetiva.

Sejam $f: A \to B$ e $C \subset A$ dados. A função $\tilde{f}: C \to B$ definida por $\tilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in C$, é chamada a *restrição de* f ao subconjunto C. Essa função $\tilde{f}$ é, geralmente, designada por $f|C$. Por exemplo, a função $\tilde{f}: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ definida como $\tilde{f}(x) = x$ é a restrição da função (iv) ao conjunto $\mathbf{R}^+$.

O leitor interessado encontrará um tratamento detalhado das ideias aqui apresentadas na referência (9). O artigo de Paul Cohen e Reuben Hersh na referência (4) faz um tratamento completo da axiomática de teoria dos conjuntos.

1.2. OS NÚMEROS RACIONAIS

Usamos as seguintes notações:

N - conjunto dos números naturais 1, 2, 3, ...

Z - conjunto dos números inteiros ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...

Q - conjunto dos números racionais, isto é, dos números da forma p/q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$.

Não está no nosso programa fazer um estudo sistemático dos três conjuntos numéricos acima. Faremos apenas alguns comentários rápidos.

Como o leitor deve observar os números racionais nada mais são que as frações da aritmética do curso primário. Quando lhe ensinaram a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações enunciadas abaixo, apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isso parece explicável porque os números inteiros gozam de quase tôdas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas fàcilmente de propriedades análogas para **Z**. Também foram ensinadas relações do tipo $8/6 = 4/3$ e $3/1 = 3$. No fundo, essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, $p/q = r/s$ se $ps = qr$. A segunda igualdade faz uma identificação do conjunto **Z** com um subconjunto de **Q**, isto é, o subconjunto

$$\{p/q \in \mathbf{Q} : q = 1\}.$$

Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que **Z** é um conjunto de **Q**.

Um *corpo* F é um conjunto de elementos $x, y, z, \ldots$ onde se acham definidas as operações de adição (i. e., a cada par de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por $x + y$) e de multiplicação (i. e., a cada par de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por xy) satisfazendo às seguintes propriedades:

(1) Leis comutativas $x + y = y + x$, $xy = yx$.

(2) Leis associativas $(x + y) + z = x + (y + z)$, $(xy)z = x(yz)$.

(3) Existência de um zero: existe um elemento $0 \in$ F tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in$ F.

(4) Existência de uma unidade: existe um elemento $1 \in$ F tal que $x1 = x$.

(5) Existência de inversos: dado $x \in$ F existe $-x \in$ F tal que $x + (-x) = 0$, e dado $x \in$ F, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in$ F tal que $xx^{-1} = 1$.

(6) Lei distributiva: $(x + y)z = xz + yz$.

É imediato verificar que o conjunto **Q** dos racionais é um corpo.

O leitor deve ser familiar com a interpretação geométrica dos racionais utilizando uma reta R, onde se escolhem dois pontos, o 0 e o 1:

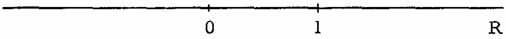


Fig. 1

Os inteiros são marcados, fàcilmente, usando o segmento de extremidades 0 e 1 como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento unidade. Se imaginarmos os números racionais marcados sôbre a reta, veremos que êles formam um subconjunto da reta que é *denso* no sentido que esclarecemos a seguir. Dado um ponto qualquer da reta poderemos obter racionais tão perto dêle quanto se queira; basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade. Pode parecer, pois, que os racionais cobrem a reta R, isto é, a cada ponto de R corresponde um racional. Que isso não é verdade, já era conhecido pelos matemáticos da Escola Pitagórica. Sabiam êles que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento igual a 1, então a hipotenusa não é racional.

Portanto, o ponto P da reta R não corresponde a um racional; veja figura 2.

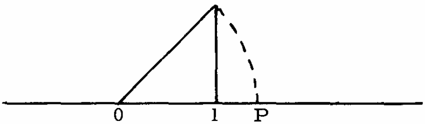


Fig. 2

Demonstração de que a hipotenusa não é racional. Suponhamos, por contradição, que a hipotenusa seja um racional p/q. Podemos supor que p e q são primos entre si. Pelo teorema de Pitágoras $(p/q)^2 = 1 + 1$, ou seja $p^2 = 2q^2$. Logo, p^2 é um inteiro par, o que implica que p é par, isto é $p = 2r$. Portanto, $4r^2 = 2q^2$ ou seja $q^2 = 2r^2$, de onde se segue que q é par. Ora, p e q sendo números pares, não podem ser primos entre si. Essa é a contradição.

O fato acima demonstrado de que existem pontos de R que não correspondem a elementos de **Q**, indica uma deficiência dos racionais. Procederemos agora no sentido de obter um conjunto numérico mais amplo que o dos racionais e cujos elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos de R. (Dois conjuntos A e B estão em correspondência biunívoca se a cada elemento de A corresponde um e sòmente um elemento de B, e vice-versa). O conjunto que vai resolver essa questão é o corpo dos números reais.

1.3. INF E SUP

Um corpo F é *ordenado* se contém um subconjunto P com as seguintes propriedades

(P1) $x \in \mathrm{P}$, $y \in \mathrm{P}$ implica $x + y \in \mathrm{P}$ e $xy \in \mathrm{P}$,

(P2) dado $x \in \mathrm{F}$, então uma e sòmente uma das três possibilidades ocorre: $x \in \mathrm{P}$, $-x \in \mathrm{P}$, $x = 0$.

O leitor verá imediatamente que $\mathbf{Q}$ é um corpo ordenado, onde P é o conjunto dos racionais positivos. Isso motiva o nome de *elementos positivos* para os elementos do subconjunto P de um corpo ordenado qualquer F. Em um corpo ordenado F, pode-se introduzir uma relação de *ordem* entre seus elementos do seguinte modo:

$$x > y \quad \text{se} \quad x - y \in \mathrm{P}.$$

No caso dos racionais essa é precisamente a ordem usual, pois $x \in \mathrm{P}$ se $x > 0$.

Exercício. Seja 0 o zero de um corpo ordenado F. Demonstre que: (i) $x \in \mathrm{P}$ se, e só se, $x > 0$; (ii) $x < 0$ se, e só se, $x \neq 0$ e $x \notin \mathrm{P}$.

Deixamos ao leitor a verificação das seguintes propriedades, que são válidas em qualquer corpo ordenado:

(1) $x > y$, $y > z \Rightarrow x > z$

(2) $x > y$, $z > t \Rightarrow x + z > y + t$

(3) $x > y$, $z > 0 \Rightarrow xz > yz$

(4) $x > 0$, $xy > 0 \Rightarrow y > 0$

(5) $x > 0$, $0 > y \Rightarrow 0 > xy$

(6) $0 > x$, $0 > y \Rightarrow xy > 0$

(7) $x > y$, z qualquer $\Rightarrow x + z > y + z$.

(O símbolo $\Rightarrow$, que se lê "implica", é usado para expressar que as assertivas do lado esquerdo acarretam o que vem escrito do lado direito. Nos enunciados de teoremas, "$\Rightarrow$" substitui a palavra "então".)

Usamos ainda os seguintes símbolos: $\geq$, $<$, $\leq$, que têm o seguinte significado:

$$x \geq y \quad \text{se} \quad x > y \quad \text{ou} \quad x = y$$

$$x < y \quad \text{se} \quad y > x$$

$$x \leq y \quad \text{se} \quad y \geq x.$$

Além disso, a seguinte terminologia é usual:

$x > y$	lê-se	x maior que y
$x \geq y$	"	x maior ou igual a y
$x < y$	"	x menor que y
$x \leq y$	"	x menor ou igual a y.

Cota superior. Seja F um corpo ordenado e A um subconjunto de F. Um elemento $x \in$ F é uma *cota superior de* A se $x \geq y$, para todo $y \in$ A. Existem conjuntos que não têm cota superior. Por exemplo, considere o corpo ordenado **Q** dos números racionais; é fácil de ver que o subconjunto **N** dos números naturais não tem cota superior (cf. exercício 2, seção 1.4). Êsse fato motiva a seguinte definição. Um subconjunto A de F se diz *limitado superiormente* se êle possui cota superior.

Cota inferior. De modo análogo, introduzimos os conceitos de cota inferior e conjunto limitado inferiormente. Um elemento $x \in$ F é uma *cota inferior* se $x \leq y$, para todo $y \in$ A. Existem conjuntos que não possuem cota inferior. O conjunto **Z** dos números inteiros não tem cota inferior no corpo **Q** dos números racionais. Um subconjunto A de um corpo ordenado F se diz *limitado inferiormente* se êle possui cota inferior.

Supremo de um conjunto limitado superiormente. Seja F um corpo ordenado e A ⊂ F um subconjunto limitado superiormente. O *supremo* do conjunto A, que designamos por sup A, é definido como a menor das cotas superiores de A (quando existe !). Em outras palavras, $x \in$ F é o supremo de A se

(i) x fôr cota superior de A, e

(ii) $x \geq z$, onde z é uma cota superior de A, implique $x = z$.

O exercício 1 no final desta seção mostra um conjunto limitado superiormente que não possui supremo.

Exemplo 1. Considere o corpo ordenado **Q**, e o subconjunto A dos racionais maiores que 0 e menores que 1, i.e.

$$A = \{y \in \mathbf{Q} : 0 < y < 1\}.$$

Qualquer racional maior ou igual a 1 é cota superior, e sup A = 1. É fácil de ver que sup B = 1, onde B = $\{y \in \mathbf{Q} : 0 \leq y \leq 1\}$. Por êsses exemplos, vemos que o sup (quando existe !) pode ou não pertencer ao conjunto.

Ínfimo de um conjunto limitado inferiormente. Seja F um corpo ordenado, e $A \subset F$ um subconjunto limitado inferiormente. O *ínfimo* de um conjunto A, que designamos por $\inf A$, é definido como a maior das cotas inferiores (quando existe!). Em outras palavras, $x \in F$ é o ínfimo de A se

(i) x fôr cota inferior de A, e

(ii) $x \le z$, onde z é uma cota inferior de A, implique $x = z$.

O exemplo 3, abaixo, mostra um conjunto que não possui inf.

Exemplo 2. Considere no corpo ordenado dos racionais os conjuntos A e B definidos no exemplo 1 acima. Vê-se que $\inf A = 0$ e $\inf B = 0$. Como no caso do sup, o inf (quando existe) pode ou não pertencer ao conjunto.

Exemplo 3. Considere o seguinte subconjunto dos racionais

$$A = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 > 2,\ x > 0\}$$

Demonstraremos que A não tem inf (em $\mathbf{Q}$). Seja

$$B = \{x \in \mathbf{Q} : x^2 < 2,\ x > 0\}$$

Como não existe racional tal que $x^2 = 2$, segue-se que dado um racional r, então ou $r \in A$ ou $r \in B$. Em primeiro lugar, provamos

(8) se $x \in A \Rightarrow$ existe $y \in A$ tal que $y < x$.

(9) se $x \in B \Rightarrow$ existe $y \in B$ tal que $x < y$.

Para provar (8) escrevemos $x = p/q$. A idéia é procurar um inteiro n tal que $y = (np - 1)/nq$ pertença a A. Isso ocorre se $(np-1)^2/n^2q^2 > 2$, i.e.,

(10) $(p^2 - 2q^2)n^2 - 2pn + 1 > 0.$

Como $x \in A$ temos que $p^2 - 2q^2 > 0$. Logo, (10) se verifica para n suficientemente grande (quão grande?). De modo análogo provamos (9). A seguir, suponhamos que A tenha ínfimo, que designamos por x_0. Então $x_0 \le x$ para todo $x \in A$. À vista de (8), x_0 não pode pertencer a A, pois, de outro modo haveria $y \in A$ tal que $y < x_0$, o que seria absurdo. Logo, x_0 deve pertencer a B. A vista de (9), existe pois $z \in$

$\in$ B tal $x_0 < z$. Como $z^2 < 2$, segue-se que z é cota inferior para A. Isso, porém, contradiz o fato de x_0 ser o inf de A. Conclusão: A não tem inf.

Exercício 1. Usando um argumento análogo ao empregado no exemplo 3, o leitor pode demonstrar que o conjunto B definido no exemplo 3 não possui supremo.

Exercício 2. Um subconjunto de um corpo ordenado se diz *limitado* se é limitado superiormente e limitado inferiormente. Dê um exemplo de um conjunto limitado que não possui nem sup nem inf.

1.4. OS NÚMEROS REAIS

Agora definimos o conjunto **R** dos *números reais* como sendo um corpo ordenado onde se verifica a seguinte propriedade:

Postulado de Dedekind. Todo subconjunto não vazio de **R** constituído de elementos positivos tem um ínfimo.

O Postulado de Dedekind realmente determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. (A rigor essa determinação é feita a menos de isomorfismos.) O corpo **R** assim definido contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com o conjunto **Q** dos racionais. Na realidade, essa correspondência goza da propriedade de preservar as operações de adição e multiplicação; correspondências biunívocas dêsse tipo tomam em álgebra o nome de isomorfismos. Para todos os efeitos, podemos simplificar essa questão do isomorfismo e simplesmente dizer que **R** contém **Q**: $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. A reta R é um belo modêlo geométrico para o corpo **R**: cada ponto de R representa um real, e vice-versa, a cada real corresponde um ponto de R. As afirmações feitas no presente parágrafo requerem demonstração. O leitor poderá encontrá-las, por exemplo, na referência (2).

Os números reais, que não são racionais, são chamados *irracionais*. Um modo de produzir exemplos de números reais é tomar inf de subconjuntos não vazios de racionais positivos. Por exemplo, o inf do conjunto A do exemplo 3 da seção 1.3 existe à vista do Postulado de Dedekind. Provamos na seção 1.3 que esse inf não é racional. Eis, pois, um exemplo de um número irracional; êsse número é designado por $\sqrt{2}$. Esta notação é justificável pelo fato de que se pode provar que $\sqrt{2}$ é a solução positiva da equação $x^2 = 2$. Na verdade, pode-se provar que a equação

$$x^n = a, \quad n \text{ - inteiro positivo}, \quad a \text{ - real positivo},$$

tem uma única solução positiva (cf. referência (10)). Essa solução que se designa por $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{1/n}$, é chamada a ***raiz n*** (ou n-ésima) de a. Dêste modo, temos um sentido atribuído a expressões como a^n (em virtude de associatividade de multiplicação) e $a^{1/n}$. Podemos, portanto, definir $a^{p/q}$, onde a é um real positivo e p e q são inteiros positivos, pela expressão

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$$

Finalmente, se r é um racional negativo definimos $a^r = (a^{-r})^{-1}$, isto é, a^r é o inverso do real a^{-r}, que já está definido pois $-r > 0$. Adiamos para o capítulo 4 a questão de atribuir um sentido a expressões como $2^{\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{3}}$, e, em geral, a^x onde a é um real positivo e x é um número irracional.

Deixamos ao leitor as verificações dos seguintes fatos que decorrem diretamente do Postulado de Dedekind.

Exercício 1. Se um conjunto A de **R** tem uma cota inferior, então A tem inf. (Sugestão: seja d uma cota inferior de A, considere o conjunto $A - d = \{x \in R : x = a - d,\ a \in A\}$, isto é, a translação do conjunto por $-d$, de modo que o novo conjunto é constituído de reais positivos.)

Exercício 2. Se B é um conjunto que tem uma cota superior, então $\sup B = -\inf(-B)$, onde $-B = \{x \in \mathbf{R} : x = -b,\ b \in B\}$. Daí se segue que todo conjunto não vazio, que tem cota superior, tem um sup.

Exercício 3. Mostre que o conjunto **N** dos números inteiros positivos não tem sup. (Sugestão: suponha que m é o sup de **N** e mostre que existe $n \in N$ tal que $m - 1 < n$.)

Exercício 4. Mostre que dado um real positivo a, existe um inteiro positivo n tal que $\frac{1}{n} < a$.

Exercício 5. Mostre que o corpo dos reais é *arquimediano*, isto é, dados dois reais a, b, com $0 < a < b$, existe um inteiro n tal que $na > b$.

Comentários sôbre a definição de número real. No comêço desta seção definimos os números reais como sendo um corpo ordenado onde vale o Postulado de Dedekind. Põe-se, imediatamente, a questão da existência de um tal corpo. Essa questão deve receber uma resposta positiva para que a definição dada de número real tenha sentido. Não é fácil provar que existe um corpo nas condições pedidas. Do ponto de vista histórico, essa questão foi resolvida relativamente tarde. Coube a Dedekind, em meados do século passado, fazer a primeira apresentação rigorosa do conceito de número real. A êle se deve a noção de "corte", com a qual é possível provar que *existe* um corpo ordenado onde vale o postulado de Dedekind, veja abaixo. Há um outro modo de introduzir os reais, através das chamadas sucessões de Cauchy, cf. seção 1.11.

A atitude adotada no presente trabalho, além da vantagem de introduzir os números reais sem maiores delongas, fornece-nos os elementos de prosseguir com absoluto rigor. Cremos que essa é a melhor atitude a tomar em cursos introdutórios de cálculo ou análise. Num estágio inicial é contraproducente expor o estudante a um tratamento minucioso que inclua a construção dos números reais.

Sòmente a título de ilustração, faremos alguns comentários sôbre o método de Dedekind. O leitor interessado poderá ver os detalhes na referência (10).

Cortes de Dedekind. O método consiste em partir do corpo ordenado $\mathbf{Q}$ dos números reais e construir um outro corpo do seguinte modo. Primeiramente, um subconjunto A dos racionais é chamado um *corte* se as três condições seguintes são satisfeitas: (i) A é não vazio e não contém todos os racionais, (ii) se $r \in A$, $s \in \mathbf{Q}$ e $s < r$ então $s \in A$, (iii) dado $r \in A$, existe $t \in A$ tal que $r < t$. Considere o conjunto $\mathbf{C}$ de todos os cortes. (Um elemento de $\mathbf{C}$ é um subconjunto de $\mathbf{Q}$!.) Em $\mathbf{C}$, pode-se *definir* operações de adição e multiplicação e provar que, com essas operações, $\mathbf{C}$ é um corpo. Define-se, também, uma relação de ordem e prova-se, então, que $\mathbf{C}$ é um corpo ordenado. Finalmente, demonstra-se que êsse corpo satisfaz o Postulado de Dedekind. Observe que, seguindo essa apresentação, o dito postulado deve ser chamado Teorema de Dedekind!

1.5. DESIGUALDADES

Designemos por $\mathbf{R}^+$ o conjunto dos elementos positivos do corpo ordenado $\mathbf{R}$. O conjunto $\mathbf{R}^+$ contém todos os racionais positivos.

O *valor absoluto* de um número real a, que se designa por $|a|$, é definido do seguinte modo:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geqq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Por exemplo, o valor absoluto de 3 é 3, e o valor absoluto de -3 também é 3. Vê-se que, em geral, temos para qualquer real a:

$$|a| = |-a|.$$

Seja a um número real positivo. Observámos na seção anterior que a equação $x^2 = a$ tem uma única solução positiva, isto é, existe $b \in \mathbf{R}^+$ tal que $b^2 = a$. Êste valor é chamado a ***raiz quadrada*** positiva (ou simplesmente a raiz quadrada) de a, e será representada por $\sqrt{a}$. Se considerarmos a equação $x^2 = 0$, vemos que $x = 0$ é solução; logo, a raiz quadrada de 0 é 0. Se considerarmos a equação $x^2 = a$, com $a < 0$, vemos que ela não pode ter solução, pois, o quadrado de um número real, positivo ou negativo, nunca é negativo. Logo, um número real negativo não tem raiz quadrada. Provaremos agora os seguintes fatos relativos a raiz quadrada.

Teorema 1.1. *Seja c um real qualquer. Então $|c| = \sqrt{c^2}$.*

Demonstração. Imediato se $c \geq 0$. Se $c < 0$, então $c^2 = |c|^2$ e, portanto, $\sqrt{c^2} = \sqrt{|c|^2} = |c|$, onde se usou na última igualdade o resultado já provado para o caso de $c \geqq 0$.

Teorema 1.2. *Sejam a e b reais positivos, tais que $a < b$. Então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.*

Demonstração. Escrevamos $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$. Daí $x^2 = a$ e $y^2 = b$. Como $a < b$, então $x^2 < y^2$. Isto é, $y^2 - x^2 > 0$, ou $(y - x)(y + x) > 0$. Sendo x e y positivos, temos que $y + x$ é positivo. Pela propriedade (4) da seção 1.3, segue-se que $y - x > 0$. Daí $x < y$, como queríamos provar.

Temos as seguintes propriedades do valor absoluto:

(i) $|ab| = |a|\,|b|$

(ii) $|a + b| \leqq |a| + |b|$ (desigualdade do triângulo)

(iii) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ (2ª desigualdade do triângulo)

quaisquer que sejam os reais a e b.

Demonstração de (i). Consideremos os três casos possíveis. Primeiro, $a \geq 0$ e $b \geq 0$; então (i) se reduz a $ab = ab$.

Segundo, $a \geq 0$ e $b < 0$; então $ab \leq 0$, e temos $|ab| = -ab$, $|a| = a$ e $|b| = -b$, o que implica (i). Terceiro, $a < 0$ e $b < 0$; então $ab > 0$, e temos $|ab| = ab$, $|a| = -a$, $|b| = -b$, e daí (i). Não há necessidade de analisar um quarto caso, $a < 0$ e $b > 0$, pois, os papeis de a e b na relação (i) são perfeitamente simétricos, em virtude da comutatividade do produto de reais.

Demonstração de (ii). A demonstração poderia ser feita, como no caso anterior, pelo exame das diversas possibilidades. Preferimos, porém, dar outra demonstração, a fim de ilustrar um outro método. Da definição de valor absoluto, segue-se que para qualquer real c, temos que

$$c \leq |c|,$$

a igualdade ocorrendo se $c \geq 0$. Portanto, temos

$$ab \leq |ab| = |a|\,|b|,$$

onde utilizamos (i) para escrever a igualdade. Multiplicando ambos os membros por 2 e somando $a^2 + b^2$ a cada membro temos

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2\,|a|\,|b| + b^2$$

ou

$$(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

em virtude de $a^2 = |a|^2$. Tomando a raiz quadrada de ambos os membros, e usando os teoremas 1.1 e 1.2 obtemos a desigualdade (ii), que queríamos demostrar.

Exercício 1. Usando (ii) acima demostre (iii).

O conjunto $\mathbf{R}^+$ é chamado a *semi-reta positiva*. Por analogia, o conjunto $\{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ é a semi-reta negativa. Em geral, uma *semi-reta* é um conjunto de uma das formas seguintes.

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x > a\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} : x < b\}.$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}.$$

onde a e b são reais quaisquer. Nos dois primeiros casos, a semi-reta não inclui a extremidade, e então é chamada *semi-reta aberta*. Nos dois últimos casos, ela inclui a extremidade, e, então, é chamada *semi-recta fechada*. Veja figura 3 abaixo:

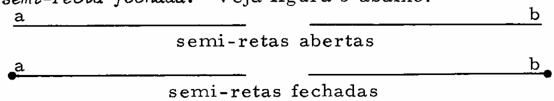


Fig. 3

Dados dois reais a e b, com $a < b$, um conjunto de uma das quatro formas abaixo é chamado um *intervalo*

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}, \quad [a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}.$$

O intervalo (a, b) não inclui suas extremidades e é chamado um ***intervalo aberto***. O intervalo $[a, b]$ inclui suas extremidades e é denominado ***fechado***. Veja figura 4 abaixo:

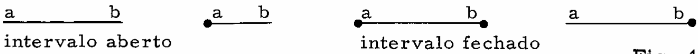


Fig. 4

O ***interior*** de um intervalo de um dos quatro tipos acima é, por definição, o intervalo aberto (a, b). Vê-se que o interior do intervalo pode coincidir com o próprio intervalo.

Por uma questão de uniformidade na nomenclatura, as semiretas e a reta inteira são chamadas também intervalos ou, mais precisamente, ***intervalos infinitos***.

Definimos interior de um intervalo infinito de modo análogo a interior de um intervalo (finito). Por exemplo, o interior de $[a, \infty)$ é (a, ∞).

Intervalos também podem ser descritos em têrmos do valor absoluto. Por exemplo:

$$(-3, 3) = \{x \in \mathbf{R} : |x| < 3\}$$
$$[-4, 4] = \{x \in \mathbf{R} : |x| \leq 4\}.$$

Nestes exemplos, o centro do intervalo (i.e, o ponto médio do intervalo) é a origem O da reta. Mostraremos agora que intervalos, não necessàriamente com centro na origem, também podem ser descritos usando o valor absoluto. Por exemplo, consideremos o conjunto

$$A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 1| < 2\}.$$

Pela definição de valor absoluto, temos que se $x \in A$, então há duas posibilidades:

1) $x - 1 \geq 0$ e, neste caso, $x - 1 < 2$. Estas duas desigualdades dão $x \geq 1$ e $x < 3$. Logo, neste caso, x pertence ao intervalo $[1.3)$.

2) $x - 1 < 0$ e, neste caso, $-(x - 1) < 2$. Estas desigualdades dizem que $x < 1$ e $x > -1$. Logo, neste caso x pertence ao intervalo $(-1, 1)$.

Juntando os dois casos, vemos que A é precisamente o intervalo $(-1, 3)$.

Pelo mesmo argumento desenvolvido acima, o leitor pode provar que:

$$\{x \in \mathbf{R} : |x + 3| < 1\} = (-4, -2)$$

$$\{x \in \mathbf{R} : |x - 3| \leqq 2\} = [1, 5].$$

Trace uma figura e observe que no primeiro caso o número -3 é o centro do intervalo e 1 é a metade do comprimento do intervalo. No segundo caso, 3 é o centro do intervalo e 2 a metade do comprimento do intervalo. Em geral, o leitor poderá provar que se a e r são reais quaisquer, com $r > 0$, então

$$\{x \in \mathbf{R} : |x + a| < r\} = (-a - r, -a + r)$$

$$\{x \in \mathbf{R} : |x + a| \leq r\} = [-a - r, -a + r]$$

$$\{x \in \mathbf{R} : |x - a| < r\} = (a - r, a + r).$$

Exercício 1. Dados dois números reais a e b, dizemos que $|a - b|$ é a *distância* entre êles. Tal conceito tem um significado geométrico evidente, se lembramos a correspondência entre os números reais e os pontos da reta. O comprimento de um intervalo $[a, b]$, (ou $[a, b)$, (a, b), $(a, b]$) é a distância entre suas extremidades.

Exercício 2. Usando valor absoluto escreva expressões para os seguintes conjuntos:

(i) o conjunto dos pontos cuja distância a 1 é menor ou igual a 4.

(ii) o conjunto dos pontos cuja distância a -5 é menor que 2.

(iii) o conjunto dos pontos cuja distância a 6 é maior que 3.

Exercício 3. Descreva geomètricamente o conjunto

$$\{x \in \mathbf{R} : |x - 2| \leq |a - 2|\},$$

considerando os vários casos possíveis para o parâmetro a.

Exercício 4. Mostre que os dois conjuntos abaixo são iguais

$$\{x : x < 4\} \quad \text{e} \quad \{x : |x - 2| < |x - 6|\}$$

(Observe que usando a noção de distância, o segundo conjunto pode ser descrito como o conjunto dos pontos cuja distância a 2 é menor que sua distância a 6.)

Exercício 5. Descreva geomètricamente o conjunto

$$\{x \in \mathbf{R} : 2 < |x - 3| < 4\}.$$

Exercício 6. (A desigualdade do triângulo generalizada.) Sejam a, b e c números reais. Prove que

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$$

(Êsse resultado pode ser provado, usando indução, para qualquer número (finito) de termos, i.e.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|).$$

1.6. SUCESSÕES

Uma ***sucessão*** é uma função $s : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ definida no conjunto dos números inteiros positivos tomando valôres reais. Assim a cada $n \in \mathbf{N}$ corresponde um real a_n. Observamos que os a_n's não são necessàriamente diferentes. Os elementos a_n são chamados os ***têrmos da sucessão,*** e a notação (a_n) é usada para designar a sucessão.

Exemplos:

(i) $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$

(ii) $1, 3, 1/2, 3, 1/3, 3, 1/4, 3, \ldots$

(iii) $1, 1/2, 1/2^2, 1/2^3, \ldots$

(iv) $1, 2, 1, 4, \ldots$

(v) $2, 2, 2, \ldots$

Atenção. A notação (a_n) não deve induzir o leitor a pensar que uma sucessão é um conjunto de reais. É essencial ter uma definição de sucessão que implique que a sucessão (i) acima seja diferente de $1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, 1, \ldots$. Quando nos referimos ao conjunto formado pelos têrmos da sucessão, usaremos a notação $\{a_n\}$.

Uma sucessão (a_n) ***converge*** para um número real r, se, para qualquer real $\epsilon > 0$ dado, existir um número natural n_0 (que pode depender de ϵ) tal que

$$(1) \qquad |r - a_n| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$.

Na verdade, ao testar a convergência de uma sucessão, nós nos interessamos sòmente no que se passa quando são dados "pequenos" ϵ's. Isso porque se a desigualdade (1) se verifica para um dado $\epsilon_0 > 0$, ela necessàriamente se verificará para todo $\epsilon > > \epsilon_0$. O número r é chamado o ***limite*** da sucessão, e tôda sucessão que converge é denominada ***convergente***. Usamos as notações $a_n \to r$, e $r = \lim a_n$.

Observações: 1) A sucessão (i) acima converge para 0. De fato, dado um $\epsilon > 0$, tomaremos um $n_0 > 1/\epsilon$. Então, para todo $n > n_0$, teremos $n > 1/\epsilon$, o que implica $1/n < \epsilon$ ou $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$.

2) A sucessão (ii) acima não converge, pois, por um lado, há têrmos da sucessão iguais a 3, para n's tão grande quanto se queira e, por outro lado, os têrmos a_n para n ímpar convergem para 0. Poderíamos formalizar êsse argumento do seguinte modo: seja dado $\epsilon = 1$. Então, qualquer que seja o real r, o intervalo $\{x \in \in \mathbf{R}: |x - r| < 1$ não pode conter o número 3 e algum têrmo a_n para n ímpar.

3) Por um argumento semelhante ao de 1) acima podemos provar que a sucessão (iii) converge para 0.

4) É imediato que a sucessão (iv) não pode convergir.

5) A sucessão (v) òbviamente converge para 2.

Quando uma sucessão não converge, diz-se que ***diverge*** e ela é então chamada uma ***sucessão divergente***. Uma sucessão ao divergir pode fazê-lo de modo que os têrmos a_n se tornam "arbitràriamente grandes". Formalmente, isso quer dizer que dado qualquer real $M > 0$, existe n_0 (que pode depender de M) tal que para todo $n \geq n_0$ temos $a_n > M$. Neste caso, dizemos que a sucessão (a_n) ***tende para*** $+\infty$. Usamos a notação $a_n \to +\infty$ ou $\lim a_n = +\infty$.

Por exemplo, a sucessão (iv) tende para $+\infty$. De modo análogo podemos definir o conceito de uma sucessão tender para $-\infty$: $a_n \to -\infty$ se dado qualquer $M > 0$ existe n_0 (que pode depender de M) tal que, para todo $n \geq n_0$, temos $a_n < -M$.

Uma sucessão pode divergir sem que seus têrmos se tornem arbitràriamente grandes, como por exemplo, a sucessão (ii) acima. A divergência, neste caso, decorre de que os têrmos se "acumulam" junto a dois pontos diferentes, 3 e 0.

Seja $A = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ um subconjunto infinito de N. A restrição $s|A$ de uma sucessão $s: N \to \mathbf{R}(s: n \to a_n)$ a A é chamada uma ***subsucessão***. Portanto, a subsucessão $s|A$ é uma sucessão definida do seguinte modo: a cada $j \in N$ corresponde o real $s(n_j) = a_{n_j}$.

Exercício 1. Seja k um número real positivo dado. Prove que uma sucessão (a_n) converge para r se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n - r| < k\varepsilon$ para $n \geq n_0$.

Exercício 2. O limite de uma sucessão convergente é único, isto é, se para uma dada sucessão (a_n) tem-se $\lim a_n = r$ e $\lim a_n = s$, então $r = s$.

1.7. PROPRIEDADES DO LIMITE

Propriedade 1. Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões convergentes, então a sucessão $(a_n + b_n)$ é convergente, e

$$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Propriedade 2. Se (a_n) e (b_n) são sucessões convergentes, então a sucessão $(a_n b_n)$ é convergente, e

$$\lim (a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n).$$

Observação. Em particular, se (b_n) fôsse uma sucessão constante, isto é, $b_n = b$ para todo n, a propriedade 2 se reduziria à seguinte assertiva: "se (a_n) é convergente, então (ba_n) é convergente, onde b é um real qualquer; além disso, tem-se

$$\lim (ba_n) = b \lim a_n".$$

Decorre, pois, que $\lim(-a_n) = -\lim a_n$. E isso, juntamente com a propriedade 1, implica que a diferença $(a_n - b_n)$ de duas sucessões convergentes é convergente, e

$$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$$

Propriedade 3. Se (a_n) é uma sucessão convergente, então a sucessão $(|a_n|)$ dos valôres absolutos é também convergente, e

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|$$

Propriedade 4. Se (a_n) é uma sucessão convergente tal que $a_n \neq 0$ para todo n, e $\lim a_n \neq 0$, então a sucessão $(1/a_n)$ é convergente, e

$$\lim (1/a_n) = 1/\lim a_n.$$

Propriedade 5. Se (a_n) é uma sucessão convergente tal que $a_n > 0$ e $\lim a_n = 0$, então $(1/a_n)$ tende para $+\infty$. Recìprocamente, se (b_n) tende para $+\infty$, e $b_n > 0$ para todo n, então a sucessão $(1/b_n)$ converge para 0.

Observação. Uma propriedade análoga pode ser enunciada com relação a $-\infty$. Pondo as duas assertivas em um enunciado único teremos: "se $a_n < 0$ para todo n, então $\lim a_n = 0$ se, e só se, $\lim (1/a_n) = -\infty$".

O leitor pode concluir fàcilmente que não é necessário supor $a_n > 0$ para *todo* n na propriedade 5 (ou $a_n < 0$ para todo n na presente observação). De fato, como a convergência ou não de uma sucessão é conseqüência do comportamento da sucessão a partir de um certo n_0, o que se passa em um *número finito* de têrmos da sucessão não perturba as questões de convergência. Então, no presente caso, poderíamos pedir $a_n \neq 0$ para todo n e $a_n > 0$ para n maior que um certo n_0. Exemplo : a sucessão -10, -3, 10, -1, 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... converge para 0, e sua inversa -1/10, -1/3, 1/10, -1, 1, 2, 3, 4, ... tende para $+\infty$.

Propriedade 6. Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões convergentes e $a_n \leq b_n$, para todo n, então

$$\lim a_n \leq \lim b_n$$

Observação. Do que foi dito na observação anterior, a conclusão da propriedade 6 é ainda válida se $a_n \leq b_n$ se verifica sòmente a partir de um certo n_0.

Propriedade 7. Se (a_n) e (b_n) são sucessões tais que $a_n \leq b_n$, para todo n (ou para n maior que um certo n_0), e (a_n) tende para $+\infty$, então (b_n) também tende para $+\infty$.

As propriedades 6 e 7 têm bastante utilidade no cálculo explícito de alguns limites. Por exemplo, suponhamos que queremos calcular o limite de uma sucessão (a_n), e que podemos determinar duas outras sucessões (b_n) e (c_n) que têm o mesmo limite r, e tais que $b_n \leq a_n \leq c_n$. Então, pela propriedade 6 acima, $\lim a_n = r$. Uma tal situação ocorre na seção 1.8. Uma outra situação que requer o uso de propriedade 7 também lá ocorre.

Deixamos ao leitor a tarefa de demonstrar as propriedades acima. Apenas para ilustrar o tipo de argumento que é usado nessas demonstrações, daremos a seguir a demonstração da propriedade 2. Utilizaremos o seguinte teorema que é também importante em outras ocasiões.

Teorema 1.3. *Seja* (a_n) *uma sucessão convergente. Então existe* $k > 0$ *tal que* $|a_n| \leq k$ *para todo* n.

Observação. Quando um tal k existe a sucessão é dita ***limitada.*** Portanto, o teorema 1.3 poderia ser assim enunciado "tôda sucessão convergente é limitada". Comparando os conceitos de sucessão limitada e de conjunto limitado (cf. seção 1.3), o leitor verá que uma sucessão é limitada se o conjunto $\{a_n\}$ é limitado.

Demonstração do teorema 1.3. Seja r o limite da sucessão. Então, dado ε, digamos $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que $|a_n - r| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Usando a 2ª desigualdade do triângulo temos

$$|a_n| - |r| \leq ||a_n| - |r|| \leq |a_n - r| < 1.$$

Logo, $|a_n| < |r| + 1$ para todo $n \geq n_0$. Seja agora k' o maior dos números $|a_1|, |a_2|, \ldots |a_{n_0 - 1}|$. É claro, pois, que se tomarmos k como sendo a maior dos dois números, k' e $|r| + 1$, então, $|a_n| \leq k$ para todo n, como queríamos provar.

Demonstração da propriedade 2. Dado $\varepsilon > 0$ existem números n_0' e n_0'' tais que

$$|a_n - r| < \varepsilon \qquad \text{para } n \geq n_0'$$

$$|b_n - s| < \varepsilon \qquad \text{para } n \geq n_0''.$$

onde $r = \lim a_n$ e $s = \lim b_n$. Agora para provar que o limite de $(a_n b_n)$ é rs, deveremos obter uma majoração para $a_n b_n - rs$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - rs| &= |a_n b_n - a_n s + a_n s - rs| \leq \\ &\leq |a_n| \, |b_n - s| + |a_n - r| \, |s| \end{aligned}$$

Pelo teorema 1.3 temos

$$|a_n b_n - rs| \leq k \, |b_n - s| + |a_n - r| \, |s|,$$

onde k é tal que $|a_n| \leq k$ para todo n. Logo para n maior que n_0, onde n_0 é o maior dos dois números n_0' e n_0'', temos

$$|a_n b_n - rs| \leq k\varepsilon + |s| \, \varepsilon.$$

Como k e $|s|$ são constantes, temos, à vista do exercício 1 (seção 1.6), que $a_n b_n \to rs$.

1.8. EXEMPLOS DE SUCESSÕES

1) ***Sucessão*** (a^n) ***onde*** a ***é um real.*** Necessitamos da seguinte desigualdade.

Lema 1.1. *Se r é um real tal que $r > -1$, então*

$$(1) \qquad 1 + nr \leq (1+r)^n \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Demonstração por indução. A desigualdade é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos que seja verdadeira para um n_0 e provemos que é também verdadeira para $n_0 + 1$. (Isso feito, o princípio da indução nos dirá que a desigualdade é verdadeira para todo n.) Tomemos, então, a desigualdade (1) com $n = n_0$, e multipliquemos ambos os membros por $1 + r$, que é um número positivo:

$$(1 + n_0 r)(1 + r) \leq (1 + r)^{n_0+1},$$

que fornece

$$(2) \qquad 1 + (n_0 + 1)r + n_0 r^2 \leq (1 + r)^{n_0+1}.$$

Como $n_0 r^2$ é positivo, o primeiro membro de (2) é maior que $1 + (n_0 + 1) r$, de onde se segue a desigualdade (1) para $n = n_0 + 1$. Logo, o lema está provado.

Observação. Òbviamente, a desigualdade (1) é válida para $r = -1$. De fato, neste caso, (1) se reduz a desigualdade $1 - n \leq 0$, a qual se verifica, pois, $n \geq 1$.

Vejamos agora a análise da convergência de (a^n).

Caso 1. $a > 1$. Então, $a = 1 + r$ onde $r > 0$. Pela desigualdade (1) acima temos

$$a^n = (1 + r)^n \geq 1 + nr.$$

Pela propriedade 7 da seção 1.7, segue-se que $a^n \to +\infty$.

Caso 2. $a < -1$. Os têrmos da sucessão alternam de sinal, de acôrdo com a paridade de n, e tendem em valor absoluto para $+\infty$. A sucessão também diverge neste caso.

Caso 3. $a = -1$. A sucessão é: $-1, 1, -1, 1, \ldots$, e diverge.

Caso 4. $a = 1$. A sucessão é: $1, 1, 1, 1, \ldots$, e converge.

Caso 5. $a = 0$, A sucessão é: $0, 0, 0, 0, \ldots$, e converge.

Caso 6. $0 < a < 1$. Então $a = \dfrac{1}{1+r}$ onde $r > 0$. Então, pela desigualdade (1) escrevemos:

$$0 < a^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr}$$

Pela propriedade 6, seção 1.7, segue-se que $\lim a^n = 0$.

Caso 7. $-1 < a < 0$. Os têrmos da sucessão alternam de sinal, mas a sucessão converge para 0.

2) *Sucessão* $(\sqrt[n]{a})$, *onde* a *é um real positivo.*

Caso 1. $a > 1$. Neste caso $\sqrt[n]{a} > 1$ e escrevemos

$$\sqrt[n]{a} = 1 + b_n \tag{3}$$

onde $b_n > 0$, e varia para cada n. De (3) obtemos

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n,$$

onde usamos a desigualdade (1) acima. Daí obtemos

$$0 < b_n \leq \frac{a - 1}{n}.$$

Pela propriedade 6, seção 1.7, concluímos que $\lim b_n = 0$. Portanto, a sucessão $(\sqrt[n]{a})$ converge para 1, pois

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 + \lim b_n = 1.$$

Caso 2. $0 < a < 1$. Neste caso $\sqrt[n]{a} < 1$ e escrevemos

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + c_n} \tag{4}$$

onde $c_n > 0$, e varia com n. De (4) e (1) obtemos

$$a = \frac{1}{(1 + c_n)^n} \leq \frac{1}{1 + nc_n}.$$

De onde se segue

$$0 < c_n \leq \left(\frac{1}{a} - 1\right) \frac{1}{n}.$$

Portanto, $c_n \to 0$ quando $n \to \infty$. E daí $(\sqrt[n]{a})$ converge para 1, também neste caso, pois,

$$\lim \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + \lim c_n} = 1.$$

3) *Sucessão* $(\sqrt[n]{n})$. Necessitamos da seguinte desigualdade.

Lema 1.2. Se r é um número real tal que $r \geq 0$, então,

$$(1 + r)^n \geq 1 + nr + n(n - 1)\, r^2/2. \tag{5}$$

Demonstração por indução. A desigualdade (5) é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos (5) válida para $n = n_0$ e provemos que ela é também válida para $n = n_0 + 1$. (Feito isso, a desigualdade estará provada para todo n.) Tomemos (5) com $n = n_0$ e multipliquemos ambos os membros pelo número positivo $1 + r$. Teremos

$$(1 + r)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0 + 1)r + n_0(n_0 + 1)\, r^2/2 + n_0(n_0 - 1)\, r^3/2. \tag{6}$$

Como o último têrmo no segundo membro de (6) é positivo, podemos eliminá-lo e a desigualdade em (6) fica preservada. Mas, então, teremos precisamente (5) para $n = n_o + 1$. O lema está provado.

Observação. É claro que sendo $r \geq 0$, a desigualdade (5) implica

$$(1 + r)^n \geq n(n - 1) r^2/2. \tag{7}$$

Voltando à sucessão $(\sqrt[n]{n})$, escrevemos

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n, \quad h_n > 0. \tag{8}$$

Aplicando (7):

$$n = (1 + h_n)^n \geq n(n - 1) h_n^2/2.$$

Daí se segue

$$0 < h_n \leq \left(\frac{2}{n - 1}\right)^{1/2}.$$

Pela propriedade 6, seção 1.7, temos que $\lim h_n = 0$. Como $\lim \sqrt[n]{n} = 1 + \lim h_n$, concluímos que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Exercício 1. Seja a um número real positivo. Mostre que a sucessão $(n^a/n!)$ converge para 0.

Exercício 2. (i) Seja r um número real diferente de 1. Mostre que

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

(ii) Prove que

$$\lim_{n \to \infty} (1 + r + \ldots + r^n) = \frac{1}{1 - r}, |r| < 1.$$

1.9. SUCESSÕES MONÓTONAS

Uma sucessão (a_n) é dita ***monótona não decrescente*** (ou simplesmente ***não decrescente***) se $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$. Anàlogamente (a_n) é dita ***monótona não crescente*** (ou simplesmente ***não crescente***) se $a_1 \geq a_2 \geq$.

Observação. A nomenclatura não decrescente (ou não crescente) é preferida para enfatizar que têrmos podem ser iguais. Os nomes crescente e decrescente são reservados para os casos em que todos os têrmos são diferentes: $a_1 < a_2 < \ldots$, e, $a_1 > a_2 > \ldots$, respectivamente.

Exemplos de sucessões crescentes são $(a_n) = (n)$ e $(a_n) = (\frac{n-1}{n})$.

Teorema 1.4. *Seja (a_n) uma sucessão não decrescente tal que o conjunto $\{a_n\}$ tem uma cota superior (cf. seção 1.3). Então, (a_n) é convergente, e seu limite é o supremo do conjunto $\{a_n\}$.*

Demonstração. Seja m o sup do conjunto $\{a_n\}$, o qual existe em virtude do Postulado de Dedekind. Provaremos que (a_n) converge para m. Suponhamos, por contradição, que $\{a_n\}$ não convirja para m. Isso quer dizer que existe um $\epsilon > 0$ com a propriedade que, para todo n_0, existe $n > n_0$ tal que $|a_n - m| > \epsilon$. (Isso é a negação da afirmativa: $a_n \to m$. Quando se faz uma negação, uma expressão como "dado" ou "para todo" é substituída por "existe um", e a expressão "existe um" é substituída por "para todo".) Observemos que a desigualdade $|x - m| > \epsilon$ quer dizer que o intervalo $[m - \epsilon, m + \epsilon]$ não contém x:

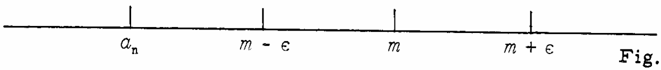


Fig. 5

Portanto, a negação acima diz que para todo n_0 existe um $n > n_0$ tal que a_n não está no intervalo $[m - \epsilon, m + \epsilon]$. Como a sucessão $\{a_n\}$ é não decrescente, concluímos que nenhum a_n pode estar nesse intervalo. Logo, $m - \epsilon$ é uma cota superior para $\{a_n\}$. Sendo $m - \epsilon < m$, isso contradiz o fato de que m é o supremo de $\{a_n\}$. O absurdo proveio da suposição de que m não fôsse o limite de (a_n). Logo, m é o limite de $\{a_n\}$ e a demonstração está completa.

Exercício 1. Demonstre o seguinte resultado: "Seja (a_n) uma sucessão não crescente tal que o conjunto $\{a_n\}$ tem cota inferior. Então, (a_n) é convergente e seu limite é o ínfimo do conjunto $\{a_n\}$.

Exercício 2. Usaremos o resultado do exercício 1 acima para dar uma outra demonstração de que $r^n \to 0$, quando $0 < r < 1$. Ora, (r^n) é uma sucessão decrescente e 0 é uma cota inferior para ela. Pelo corolário, existe $m \geq 0$ tal que $r^n \to m$. Pela propriedade 2 de limites, segue-se que $r^n r = r^{n+1} \to rm$. Mas, $\{r^n\}$ e $\{r^{n+1}\}$ têm o mesmo limite m, pois à exceção do primeiro têrmo de $\{r^n\}$ ambas coincidem. Como, então, (r^{n+1}) converge para m e para rm, segue-se que $rm = m$, o que implica $m = 0$, pois $r < 1$.

Exercício 3. (Teorema dos intervalos encaixantes). Seja $[a, b] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ uma sucessão de intervalos fechados, cada um contendo o seguinte. Suponha que a sucessão $(b_n - a_n)$ dos comprimentos de tais intervalos tende a 0. Demonstre que existe um único ponto c comum a todos êsses intervalos. (Sugestão: Considere as sucessões monótonas (a_n) e (b_n) e aplique o teorema 1.4.)

Exercício 4. Dê um exemplo para mostrar que a conclusão do exercício precedente não se verifica se os intervalos forem abertos. Mostre que o resultado também é falso se os comprimentos dos intervalos não tenderem a zero.

1.10. O TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

Um subconjunto A de **R** é dito *limitado* se existe um $k > 0$ tal que $|x| \leq k$ para todo $x \in A$. Em outras palavras, um conjunto é limitado se êle está contido em algum intervalo. Ou ainda, se êle tem cota inferior e cota superior. Dizemos que uma sucessão (a_n) está *contida* em um certo conjunto A se $a_n \in A$ para todo n. (Há um certo abuso de linguagem, pois, como chamamos a atenção anteriormente, uma sucessão não é um conjunto.)

Teorema 1.5. (Bolzano-Weierstrass). *Seja* A *um subconjunto limitado de* R. *Então tôda sucessão* (a_n) *contida em* A *contém uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Definimos um conjunto B de reais do seguinte modo: "$x \in B$ se existe no máximo um número finito de têrmos de (a_n) que são maiores que x". Por exemplo, se M é o sup de A, então qualquer ponto $x > M$ pertenece a B. Exemplifiquemos outra possibilidade: seja $A = [0, 1]$ e $(a_n) = (1/n)$; então, qualquer real positivo r pertence a B, pois, apenas um número finito de têrmos de (a_n) são maiores que r; neste exemplo, B seria precisamente o conjunto dos reais positivos. Um terceiro exemplo seria $A = [0, 1]$ e (a_n) a sucessão $1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, \ldots$; neste caso $x \in B$ se, e sò se, $x \geq 1$; observe que pontos $x < 1$ e perto de 1 não pertencem a B, pois, apesar de apenas os têrmos iguais a 1 serem maiores que x, êles são em número infinito. Voltemos ao caso geral. B é um conjunto com cota inferior, pois, qualquer cota inferior de A é òbviamente cota inferior de B. Portanto, pelo Postulado de Dedekind, B tem ínfimo, seja m tal ínfimo. Agora vamos contruir uma subsucessão (a_{n_j}) de (a_n) tal que $a_{n_j} \to m$. O intervalo $(m - 1, m + 1)$ contém un número infinito de têrmos da sucessão (a_n), pois, de outro modo, $m - 1$ estaria em B, e portanto, m não seria o ínfimo de B; tome um dêsses têrmos de a_n, a_{n_1}, então

$$|a_{n_1} - m| < 1.$$

O intervalo $(m - 1/2, m + 1/2)$ contém um número infinito de têrmos da sucessão (a_n), o que se prova do mesmo modo que no caso precedente; seja a_{n_2} um tal têrmo e tal que $n_2 > n_1$.

(Observe que a_{n_2} pode ser igual a a_{n_1} !) Então,

$$|a_{n_2} - m| < 1/2.$$

Assim por diante, tomamos $a_{n_j} \in (m - 1/j,\ m + 1/j)$ e tal que $n_j > n_{j-1} > \ldots,\ n_2 > n_1$. Dêste modo constrói-se uma subsucessão (a_{n_j}) de (a_n) tal que $a_{n_j} \to m$ quando $j \to \infty$, pois

$$|a_{n_j} - m| < 1/j.$$

1.11. O CRITÉRIO DE CAUCHY

A presente seção trata de um critério que caracteriza a convergência de uma sucessão. Êle oferece uma maneira de saber se uma dada sucessão é convergente sem se ter o conhecimento prévio do limite. Isso é importante pois se em alguns casos se tem uma indicação óbvia do que venha a ser o limite, em outros casos o número que é o limite da sucessão é definido precisamente pela sucessão e não se tem para êle uma representação decimal ou fracionária simples. Tal limite é um número real, que pode ser determinado aproximadamente tomando-se um têrmo da sucessão; quanto maior fôr a ordem de tal têrmo melhor será a aproximação.

Teorema 1.6. (Critério de Cauchy). *Uma sucessão* (a_n) *é convergente se, e só se, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathrm{N}$ *tal que* $|a_n - a_m| < \epsilon$ *para* $m,\ n \geq n_0$.

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que (a_n) seja convergente e seja r seu limite. Então, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $|a_n - r| < \epsilon/2$ para $n \geq n_0$. Logo, se n e m são maiores que n_0 temos, usando a desigualdade do triângulo:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - r| + |a_m - r| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Recìprocamente, suponhamos que a condição do teorema seja satisfeita e provemos que (a_n) é convergente. Devemos, pois, descobrir o limite r. Pela hipótese, dado $\epsilon = 1$ existe n_0 tal que

$$|a_n - a_m| < 1, \quad \text{para } n, m \geq n_0$$

Logo,

$$|a_n - a_{n_0}| < 1, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

Da desigualdade do triângulo segue-se então:

$|a_n| \leq |a_{n_0}| + |a_n - a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$ para $n \geq n_0$. Seja agora k' o maior dos números $|a_1|,\ |a_2|, \ldots |a_{n_0 - 1}|$, e seja k o maior dos dois números, k' e $1 + |a_{n_0}|$. Portanto,

(1) $$|a_n| \leq k, \quad \text{para todo } n.$$

Aplicando o teorema de Bozano-Weierstrass, segue-se que (a_n) contém uma subsucessão convergente (a_{n_j}), e seja r seu limite. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n'_o \in \mathbf{N}$ tal que

$$|a_{n_j} - r| < \varepsilon$$

para $n_j \geq n'_o$. Por outro lado, em virtude da hipótese, temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n''_o \in \mathrm{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

para $n, m \geq n''_o$. Agora, pela desigualdade do triângulo, temos

(3) $$|a_m - r| \leq |a_m - a_n| + |a_n - r|$$

para quaisquer têrmos a_n e a_m de (a_n). Logo, se em (3) tomamos $m \geq \max(n'_o, n''_o)$ e $n = n_j \geq \max(n'_o, n''_o)$ temos

$$|a_m - r| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

o que prova a convergência de (a_m).

Sucessões de Cauchy. (i) Uma sucessão (a_n) de números reais é denominada uma *sucessão de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o (que pode depender de ε) tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq n_o$. O teorema 1.6 diz que uma sucessão (a_n) de *números reais* é convergente se, e só se, ela é de Cauchy. Em virtude dêste fato, que tôda sucessão de Cauchy tem um limite, o conjunto dos reais é chamado *completo*. A noção de completo, como o leitor vê, depende sòmente das distâncias (cf. seção 1.5) entre os elementos da sucessão; em virtude disso, tal noção pode ser estudada em outros conjuntos onde se pode medir "distâncias" de pontos. Êsses conjuntos são chamados espaços métricos; ao leitor interessado recomendamos a referência (7).

(ii) Uma sucessão (a_n) de números racionais é denominada uma *sucessão de Cauchy* se, dado $\varepsilon > 0$, existe n_o (que pode depender de ε) tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todos $n, m \geq n_o$. (É a "mesma" definição acima, excepto que consideramos apenas racionais.) Considerando apenas racionais, vemos que existem sucessões de Cauchy de números racionais que não convergem *para um número racional*. Exemplo: a sucessão 1, 1.4, 1.41, 1.414, ... que converge (no conjunto dos reais) para $\sqrt{2}$. Em virtude de haver sucessões de Cauchy de racionais que não convergem para um racional, dizemos que o conjunto dos racionais não é completo.

(iii) O conjunto dos reais pode ser construído a partir dos números racionais, do seguinte modo. Damos, apenas, um esbôço do método, e os detalhes podem ser encontrados na referência (2), cf. também (7). A imprecisão dêsse esbôço será perdoável, se conseguirmos despertar o interêsse de algum leitor para estudar a questão mais a fundo!

Considere o conjunto C de tôdas as sucessões de Cauchy de números racionais. (Um elemento de C é uma sucessão de números racionais!) Como não desejamos distinguir entre sucessões que estão "perto" uma da outra (por exemplo: $(1+\frac{1}{n})$ e $(1-\frac{1}{n})$) consideramos um novo conjunto C', cujos elementos são classes ou subconjuntos de C. (Um elemento de C' é um conjunto de sucessões de Cauchy de racionais!) Nesse conjunto C', define-se operações de adição e multiplicação e demonstra-se que C' é um corpo. Define-se também uma ordem em C', e prova-se que, com essa ordem, C' é um corpo ordenado. Finalmente, demonstra-se que o corpo ordenado C' satisfaz o Postulado de Dedekind. Êsse corpo C' é definido como o corpo dos reais.

1.12. SÉRIES NUMÉRICAS

Nesta seção trataremos de atribuir um sentido à "soma infinita"

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots, \tag{1}$$

onde os têrmos a_n são números reais dados. Uma expressão da forma (1) é chamada uma *série númerica.*

Associamos à sucessão (a_n) dada acima, uma nova sucessão (A_n), chamada *sucessão das reduzidas* ou *das somas parciais,* que é assim definida

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \dots + a_n.$$

Se a sucessão (A_n) tem um limite S, dizemos que a série (1) *converge,* e que sua *soma* é S. Se a sucessão (A_n) não tem limite, dizemos que a série (1) *diverge.* No caso de convergência, escrevemos

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Exemplo 1. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$. A soma parcial A_n é igual a $1-\frac{1}{2^n}$, cf. exercício 2 da seção 1.8. É claro que o limite de A_n é 1. Logo, a série em pauta converge e sua soma é 1.

Exemplo 2. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, onde $|r| < 1$. Deixamos ao leitor a verificação da convergência dessa série, e a demonstração que sua soma é $(1 - r)^{-1}$. Cf. exercício 2 da seção 1.8. Essa é a chamada *série geométrica.*

Exemplo 3. As séries $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n$, òbviamente divergen.

Observação. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b a_n$ também converge, onde b é um número real qualquer. De fato, se A_n é a reduzida de ordem da primeira série e B_n é a reduzida de ordem n da segunda série, temos que $B_n = bA_n$. Portanto $\lim B_n = b \lim A_n$. Podemos, portanto escrever $\sum_{n=1}^{\infty} ba_n = b \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Teorema 1.7. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se, e só se, dado* $\epsilon > 0$, *existe* n_0 *(que pode depender de* ϵ*) tal que* $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| < \epsilon$ *para todos* $n, m \geq n_0$.

Deixamos a demonstração a cargo do leitor e sugerimos o uso do critério de Cauchy para convergência de sucessões, i.e., teorema 1.6.

Corolário 1.1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, então* $\lim a_n = 0$.

Observação. O teorema 1.7 mostra que a convergência ou não de uma série não é decidida pelo que se passa em número finito de têrmos. Mais precisamente: seja p um número inteiro positivo *fixado,* então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (ou diverge) se, e só se, a série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge (ou diverge).

Exemplo. A série harmônica, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge. De fato, temos

$$\sum_{j=n}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

e aplicando o teorema acima, o resultado se segue.

Observação. O exemplo acima mostra que o corolário 1.1 fornece apenas uma condição *necessária* para a convergência de uma série. Em outras palavras, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pode divergir e, apesar disso, pode-se ter $\lim a_n = 0$. Entretanto, se os têrmos a_n alternarem de sinal, então a condição $\lim a_n = 0$ é "quase" suficiente para a convergência da série. Mais precisamente temos o

Teorema 1.8. (Séries alternadas). *Seja* (a_n) *uma sucessão de números reais não negativos, tais que* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ *e* $\lim a_n = 0$. *Então a série* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ *converge.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que as reduzidas de ordem par formam uma sucessão não decrescente. De fato

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

onde as expressões em cada parentêsis são não negativas.

Anàlogamente, a sucessão das reduzidas de ordem ímpar é não crescente:

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

onde as expressões em cada parêntesis são não negativas. A seguir, observamos que a sucessão (S_{2n}) é limitada superiormente, pois $S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_1$, e daí S_1 é uma cota superior para essa sucessão. Do mesmo modo, a sucessão (S_{2n+1}) é limitada inferiormente, pois $S_{2n+1} \geq S_{2n+2} \geq S_2$, e daí S_2 é uma cota inferior para a sucessão das reduzidas de ordem ímpar. Aplicando o teorema 1.4, concluímos que existem números reais r e s tais que

$$\lim S_{2n} = r \quad \text{e} \quad \lim S_{2n+1} = s.$$

Como $\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim a_{2n+1}$, e $a_n \to 0$, segue-se que $r = s$, o que demonstra o teorema.

Exercício 1. Use o teorema 1.4 para provar o seguinte teorema: "Uma série de têrmos não negativos é convergente se, e só se, as reduzidas formam uma sucessão limitada".

Exercício 2. Use o exercício precedente e demonstre: "Seja (a_n) uma sucessão de números reais não negativos e tais que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e só se, a série abaixo converge

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^j a_{2^j} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é *majorada* por uma série de têrmos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, se existe n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, tenhamos $|a_n| \leq b_n$. É comum dizer-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma *majorante* da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Teorema 1.9. *A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se ela possui uma série majorante $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, que converge.*

Demonstração. Basta observar que

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} b_j,$$

para $n_0 \leq n \leq m$, e aplicar o teorema 1.7.

Corolário 1.2. *Suponhamos que a série de têrmos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma majorante de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é também divergente.*

Demonstração. Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e aplique o teorema anterior para chegar a uma contradição.

Corolário 1.3. *Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também converge.*

A demonstração do corolário precedente é imediata. A recíproca não é verdadeira: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1}$.

Exercício 3. Aplique o corolário 1.2 e mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ diverge, se $p < 1$.

Exercício 4. Aplique o teorema 1.9 e o exercício 2 acima e mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$ converge, se $p > 1$.

Definição. Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente* (ou, é absolutamente convergente) se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. O corolário 1.3 mostra que toda série absolutamente convergente é também convergente.

Apresentaremos a seguir dois testes para a convergência absoluta de séries numéricas.

Teorema 1.10. (Teste da razão). *Consideremos uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e suponhamos que* $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ *existe. Seja* l *tal limite. Então:* (i) *a série converge absolutamente se* $l < 1$; (ii) *a série diverge se* $l > 1$; (iii) *o teste não fornece informação se* $l = 1$.

Demonstração. (i) Do fato que $l = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, segue-se que existe n_o tal que

(1) $$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq b$$

onde $b = (1 + l)/2$. Observe que $b < 1$. De (1) obtemos

$$|a_{n_o+1}| \leq b|a_{n_o}|$$

$$|a_{n_o+2}| \leq b|a_{n_o+1}|$$

$$\ldots$$

$$|a_{n_o+p}| \leq b|a_{n_o+p-1}|,$$

e daí se segue:

$$|a_{n_o+p}| \leq b^p|a_{n_o}| .$$

A desigualdade acima mostra que a série $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{n_o+p}|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{n_o}| b^p = |a_{n_o}| \sum_{p=1}^{\infty} b^p$. Como $b < 1$, segue-se, pelo teorema 1.9, que a série $\sum_{p=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

(ii) Como $l > 1$, segue-se que existe n_o tal que, para $n \geq n_o$, tem-se

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1.$$

Logo $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, para $n \geq n_0$. Portanto, (a_n) não pode convergir para 0. Logo, pelo corolário 1.1, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ deve divergir.

(iii) Para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, temos $l = 1$. Por outro lado, a primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

Teorema 1.11. *Consideremos a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e suponhamos que* $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ *existe. Seja* l *êsse limite. Então:* (i) *a série converge absolutamente se* $l < 1$; (ii) *a série diverge se* $l > 1$; (iii) *o teste não dá informação se* $l = 1$.

Demonstração. (i) Pela definição de limite, segue-se que existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos

$$(2) \qquad \sqrt[n]{|a_n|} \geq b,$$

onde $b = (1 + l)/2$. Observe que $b < 1$. De (2) obtemos

$$|a_n| \leq b^n, \quad \text{para } n \geq n_0.$$

A desigualdade acima mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$. Como $b < 1$, segue-se, pelo teorema 1.9, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

(ii) Se $l > 1$, concluimos que existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$, temos $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$. Daí $|a_n| \geq 1$, para $n \geq n_0$, e portanto, a sucessão (a_n) não tende a 0. Pelo corolário 1.1, concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) É fácil ver, usando resultados da seção 1.8, que $l = 1$ para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. A primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

Exercício 5. Demonstre que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)r^n$ convergem se $|r| < 1$.

2

AS FUNÇÕES REAIS

2.1. FUNÇÕES REAIS

Na seção 1.1 definimos o conceito geral de função. Neste trabalho, porém, estamos interessados em um tipo especial de funções, as funções reais. Uma função f é dita real se seu campo de definição é o conjunto $\mathbf{R}$ ou um subconjunto dêle, e seu contradomínio é o conjunto $\mathbf{R}$. Usamos a notação $\mathscr{D}(f)$ para designar o campo de definição da função f.

Exemplos:

(i) $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$. Aqui $\mathscr{D}(f) = \mathbf{R}$.

(ii) $f(x) = x$ para $x \in [0, 1]$. $\mathscr{D}(f) = [0, 1]$.

(iii) $f(x) = x + 1$ para $x \in (0, 1)$

$= 0$ para $x = 0$. $\mathscr{D}(f) = [0, 1)$.

(iv) $f(x) = 2x - 1$ para $x \in (1, 2]$. $\mathscr{D}(f) = (1, 2]$.

(v) $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbf{R}$. $\mathscr{D}(f) = \mathbf{R}$.

(vi) $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. $\mathscr{D}(f) = [0, +\infty)$.

(vii) $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbf{R}$. $\mathscr{D}(f) = \mathbf{R}$.

(viii) $f(x) = 1$, para $x > 0$
0, para $x = 0$
-1, para $x < 0$. $\mathscr{D}(f) = \mathbf{R}$.

(ix) $f(x) = [x]$, para todo $x \in \mathbf{R}$, onde $[x]$ designa o maior inteiro menor ou igual a x. $\mathscr{D}(f) = \mathbf{R}$.

(x) $f(x) = 1/x$, para $x \neq 0$. $\mathscr{D}(f)$ é o conjunto $\mathbf{R}$ menos o ponto $x = 0$.

Um modo de interpretar geomètricamente uma função é traçando seu gráfico. Para isso tomamos um sistema cartesiano de coordenadas, isto é, um par de retas perpendiculares onde se marca o 0 e o 1, como se indica na figura 6.

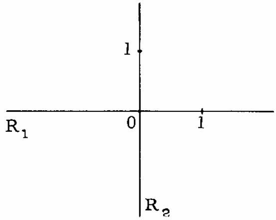


Fig. 6

Assim, como já se viu na seção 1.4, cada ponto da reta R_1 é representável por um real, o mesmo acontecendo com os pontos da reta R_2. Vê-se então que dado um ponto P do plano podemos determinar um número real x como a interseção da reta R_1 com a reta perpendicular a R_1 e passando por P. Um outro real y é também determinado como a interseção da reta R_2 com a reta perpendicular a R_2 passando por P.

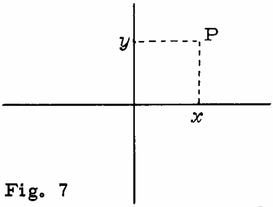


Fig. 7

Com êsse procedimento, associamos a cada ponto P do plano um par (x, y) de reais, que são chamados as ***coordenadas*** de P. Recìprocamente, dado um par (x, y) de reais, determinaremos um ponto P como a interseção da reta perpendicular a R_1 passando por x com a reta perpendicular a R_2 passando por y. Veja os exemplos na figura 8.

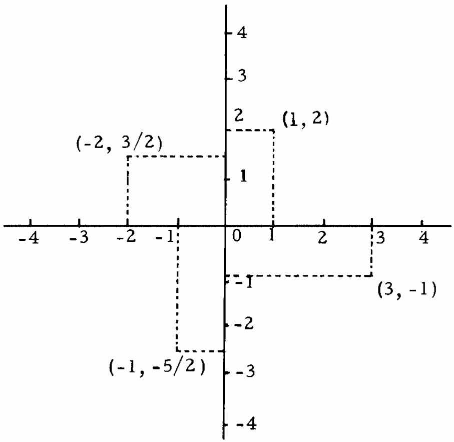


Fig. 8

Pelo que acabamos de expor, vê-se que há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares (x, y) de reais. A primeira coordenada, x, é sempre marcada sôbre a reta R_1, que é usualmente chamada o *eixo dos* x. A segunda coordenada, y, é marcada sôbre a reta R_2, que é chamada o *eixo dos* y.

Voltemos à questão da interpretação gráfica de uma função. O *gráfico* de uma função f é o subconjunto do plano formado pelos pontos $(x, f(x))$, quando x percorre o campo de definição da função. Tracemos o gráfico das funções definidas acima. (Veja Fig. 9.)

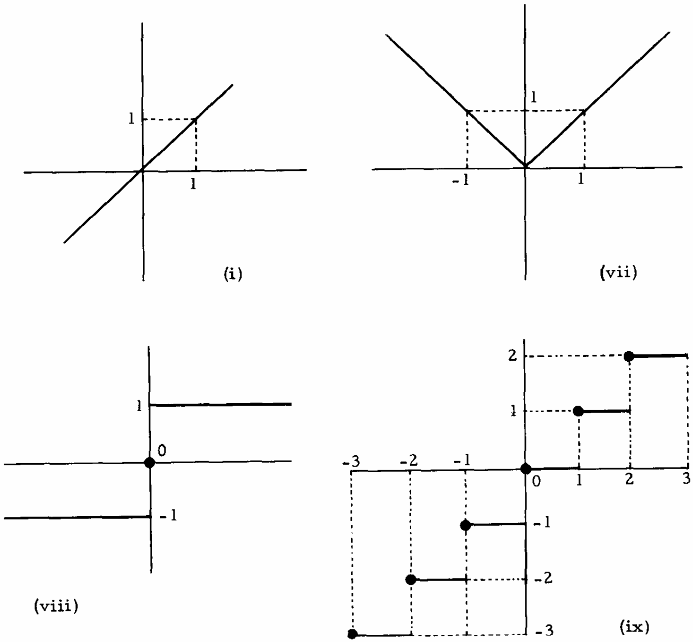


Fig. 9

Para traçar os gráficos das funções (v), (vi) e (x) (Figs. 10, 11 e 12), é conveniente, como na maior parte dos casos, fazer uma tabela. Na primeira coluna colocam-se alguns números do domínio da função e na segunda coluna escrevem-se os valôres correspondentes da função. O número de pontos que se considera na tabela depende da precisão que se deseja para o gráfico. Vejamos o exemplo (ii).

x	x^2
0	0
1	2
2	4
3	9
-1	1
-2	4
-3	9

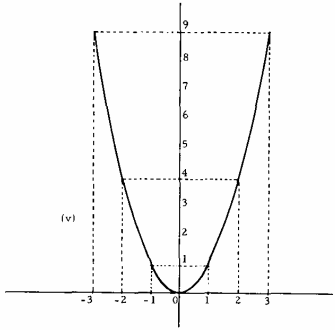


Fig. 10

Antes de traçar o gráfico de uma função, vale a pena analisá-la por um momento a fim de tentar descobrir alguma simetria ou algum fato que simplifique o trabalho. Por exemplo, a função $f(x) = x^2$ tem uma simetria com relação ao eixo dos y pois (x, x^2) e $(-x, x^2)$ são pontos do gráfico.

O gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ é o conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que $x \geq 0$ e $y = \sqrt{x}$. Observamos, primeiramente, que $y^2 = x$, de onde uma tabela para $f(x) = \sqrt{x}$ seria obtida a partir de uma tabela para o função x^2 (tomando sòmente os reais $x \geq 0$), trocando as colunas. Assim usando a tabela acima obtemos:

x	$\sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3

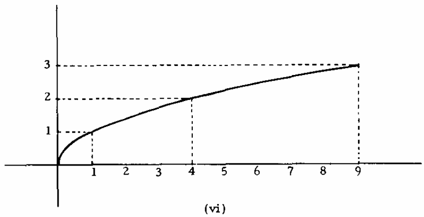


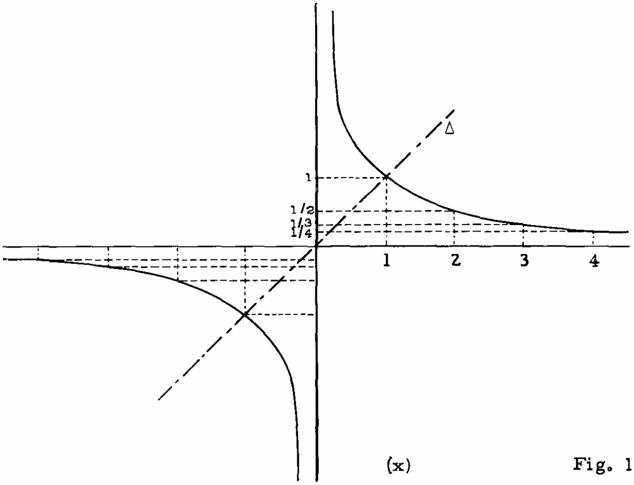
Fig. 11

Finalmente, vejamos o exemplo (x). Com a tabela

x	$1/x$
1	1
2	1/2
3	1/3
4	1/4

x	$1/x$
-1	-1
-2	-1/2
-3	-1/3
-4	-1/4

Podemos traçar o gráfico



(x) Fig. 12

Não é difícil ver que o gráfico de $1/x$ é simétrico em relação à diagonal Δ indicada na figura 12.

2.2. LIMITES LATERAIS DE UMA FUNÇÃO

Consideremos uma função real $f: A \to \mathbf{R}$ definida em um subconjunto A dos números reais.

Definição 1. Seja c um número real tal que, para algum $d > c$, o intervalo aberto (c, d) esteja contido em A. Esta situação ocorreria, por exemplo, se $A = (a, b]$ e c fosse um ponto do interior do intervalo $(a, b]$ ou se $c = a$. A função $f: A \to \mathbf{R}$ tem *limite à direita* no ponto c se existir um real r tal que, para qualquer sucessão (x_n) contida em A, com $x_n > c$, e convergindo para c, tenha-se que a sucessão $(f(x_n))$ converge para r, isto é, $\lim f(x_n) = r$. Tal número r é chamado o *limite à direita* de f no ponto c, o qual é geralmente designado pelas notações $f(c+)$ ou $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$. Observe que a função não precisa estar definida no ponto c para o limite à direita existir, pois c podia ser igual a a no caso $A = (a, b]$ exemplificado acima.

Definição 2. Seja agora c um real tal que, para algum $c' < c$, o intervalo aberto (c', c) esteja contido em A. Por exemplo, $A = [a, b)$ e c um ponto interior do intervalo A ou $c = b$. A função

$f: \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ tem *limite à esquerda* no ponto c se existir um real s tal que, para qualquer sucessão (x_n) contida em A, com $x_n < c$, e convergindo para c, tenha-se $\lim f(x_n) = s$. Tal número s é chamado o *limite à esquerda* de f no ponto c, o qual é geralmente designado por $f(c-)$ ou $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$. Como no caso do limite à direita a existência do limite à esquerda no ponto c nada tem a ver com a função estar ou não definida no ponto c.

Exemplos da seção 2.1

(i) Para a função (i) temos $f(0+) = 0$ e $f(0-) = 0$.

(iv) Para a função (iv), $f(1+) = 1$, e f não é definida para $x = 1$.

(viii) Para a função (viii), $f(0+) = 1$ e $f(0-) = -1$, enquanto $f(0) = 0$.

(ix) Para a função (ix), $f(3+) = 3$ e $f(3-) = 2$.

(x) Para a função (x), $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem.

O leitor pode fàcilmente ver que para os exemplos (ii), (iii) e (iv), as funções têm limite à direita em certos pontos, mas não limite à esquerda, ou vice-versa.

Definição 3. Seja agora c um real tal que existam intervalos abertos (c', c) e (c, d) contidos em A. Por exemplo, isso seria o caso se A contivesse um intervalo I e c fôsse um ponto do interior de I; ou ainda, se A fôsse composto de dois intervalos consecutivos, como por exemplo, $[0, 1)$ e $(1, 2)$ e $c = 1$. Vê-se, no primeiro exemplo, que c pertence a A, e no segundo, que c não pertence a A. A função $f: \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ tem *limite* em um tal ponto c se existem os limites à direita e à esquerda, $f(c+)$ e $f(c-)$, e são iguais. Êsse valor comum é chamado o *limite* de f no ponto c é designado por $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.

Exemplos da seção 2.1

(i) Para a função (i) temos $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(ii) Para a função (ii), $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe, apesar de $f(0+)$ existir.

O exemplo (x) é de uma função para a qual $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem. Neste caso, a não existência dêsses limites decorre do fato que a função se torna ilimitada nas proximidades de 0. Nas circunstâncias do exemplo (x), é comum dizer que o limite lateral é $+\infty$ ou $-\infty$ conforme o caso. O leitor deve, porém, compreender que isso é uma convenção e que de nenhum modo essa situação está incorporada na definição. (De fato, $+\infty$ e $-\infty$ não são números!) Daremos agora um exemplo de uma função cujos limites laterais em um ponto não existem, apesar de a função se manter limitada:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

Para esta função, $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem.

O caráter local do limite. Nas três definições acima pediu-se a existência de intervalos adjacentes ao ponto c onde a função f fôsse definida e uma certa propriedade fôsse válida. É fácil de ver que, no caso da definição 1, poderíamos tomar, em vez do intervalo (c, d), qualquer intervalo (c, d'), com $c < d' < d$. Em outras palavras, $f(c+)$ existe se, e sòmente se, existe um real r tal que, para qualquer d' com $c < d' \leq d$, temos que: dada $(x_n) \subset \subset (c, d')$ e convergindo para c, então $f(x_n)$ converge para r. Isso mostra que a questão de existência dos limites em um ponto depende tão sòmente do comportamento da função "perto" daquele ponto.

Teorema 2.1. *Seja $f : A \to \mathbf{R}$ uma função real, e suponhamos que c seja um real tal que existam intervalos (c', c) e (c, d) contidos em* A. *Então, f tem limite no ponto c se, e só se, existe um número real r, tal que $f(x_n) \to r$, para qualquer sucessão (x_n), contida nos intervalos (c', c) e (c, d), e convergindo para c.*

Observação. Como antes não se requer que c pertença a A. As sucessões (x_n) não estão necessàriamente em um mesmo intervalo (c', c) ou (c, d); elas podem oscilar de um lado e outro de c.

Demonstração. Deixamô-la ao leitor. Como sugestão lembramos que há três possibilidades quanto à localização dos têrmos x_n: 1) existe um n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in (c', c)$; 2) existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $x_n \in (c, d)$; 3) x_n se compõe de duas subsucessões (x_{n_j}) e (x_{n_j}) satisfazendo respectivamente às condições postas nas definições 1 e 2 acima.

Observação. O que estabeleceremos a seguir tem o mérito de simplificar a verificação se certo número r é limite lateral (ou limite) de uma função f num ponto c. Na definição 1 acima vimos que devíamos tomar tôdas as sucessões (x_n) contidas em A convergindo para c e com $x_n > c$ e provar que $f(x_n) \to r$. Uma pergunta natural é a seguinte: será necessário verificar isso para tôdas as sucessões? É também natural esperar-se que baste considerar as sucessões decrescentes. É isso que provamos a seguir. Suponha, então, que para tôda sucessão decrescente (x_n) contida em A convergindo para c tenhamos $f(x_n) \to r$. Seja agora (y_n) uma sucessão arbitrária contida em A com $y_n > c$ e $y_n \to c$; suponhamos, por contradição, que $f(y_n)$ não convirja para r. Logo, existe $d > 0$

e uma subsucessão (y_{n_j}) de (y_n) tal que: (*) $|f(y_{n_j}) - r| > d$. Como (y_{n_j}) converge para c e $y_{n_j} > c$ segue-se que existe uma subsucessão (y_m) de (y_{n_j}), a qual é decrescente e converge para c. (Prove isso!) Então, pela hipótese, temos que $f(y_m) \to r$, o que contradiz a desigualdade (*) acima. De modo análogo podemos provar que na definição 2 basta tomar sucessões x_n que sejam crescentes.

Limites quando $x \to \infty$. Ao tentar traçar o gráfico de uma função $f : A \to \mathbf{R}$ definida em um conjunto A que contém um intervalo infinito (por exemplo, $A \supset [a, +\infty)$) vemos que é extremamente importante saber qual é seu comportamento para valôres arbitràriamente grandes de x, ou como é comum dizer-se, quando x tende para $+\infty$. Uma resposta adequada a êsse problema será conseguida através da introdução do limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$, e do limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$, o que faremos a seguir.

Seja A um subconjunto de $\mathbf{R}$ que contém um intervalo da forma $[a, +\infty)$ para algum número real a. Uma função $f : A \to \mathbf{R}$ *tem limite* quando $x \to +\infty$ se existe um número real r tal que, para qualquer sucessão (x_n) contida em A e tal que $x_n \to +\infty$, tem-se que $f(x_n) \to r$. O número r é chamado o *limite de* $f(x)$ *quando* $x \to +\infty$, e se usa a notação $r = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exemplo 1. $f(x) = \frac{1}{1 + x}$, para $x > -1$. Nêste caso, é fácil ver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Exemplo 2. $f(x) = \frac{x + 1}{x}$, para $x > 0$. Nêste caso $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Exemplo 3. $f(x) = x^2$, para todo x real. Nêste caso, não existe nenhum número real r que seja o limite de $f(x)$, quando $x \to +\infty$. Entretanto, observamos que qualquer que seja a sucessão (x_n) com $x_n \to +\infty$, temos que $f(x_n) \to +\infty$. Convencionamos, em casos como êste, dizer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemplo 4. $f(x) = (-x)^3$. Como no exemplo anterior o limite de $f(x)$, quando $x \to +\infty$, não existe. Mas em virtude de $f(x_n) \to -\infty$, para tôda sucessão (x_n) tal que $x_n \to +\infty$, convencionamos dizer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Exemplo 5. $f(x) = \sin x$, para todo x real. Apesar de não havermos introduzido ainda ao funções trigonométricas, imaginamos que o leitor seja familiar com as mesmas, e queremos dar êste exemplo para mostrar que o limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ pode não existir.

De modo análogo podemos definir o limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$, para funções $f: A \to \mathbf{R}$, cujo campo de definição A contém intervalos de forma $(-\infty, a]$.

Exercício 1. Seja $f: A \to \mathbf{R}$ uma função real e c um ponto tal que o intervalo $(c, d) \subset A$ para algum $d > c$. Prove que r é o limite à direita de f no ponto c se, e só se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - r| < \epsilon$ para todo x com $c < x < c + \delta$.

Exercício 2. Enuncie e demonstre um resultado análogo para o limite à esquerda.

Exercício 3. Mesma questão para o limite de f no ponto c.

Exercício 4. Seja $f: A \to \mathbf{R}$ uma função definida em um conjunto A, o qual contém um intervalo da forma $[a, +\infty)$. Prove que r é o limite de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ se, e só se, dado $\epsilon > 0$ existe um real N (o qual pode depender de ϵ) tal que $|f(x) - r| < \epsilon$ para todo $x \geq N$.

Exercício 5. Enuncie e prove um resultado análogo para limite de $f(x)$ quando $x \to -\infty$.

2.3. OPERAÇÕES COM LIMITES DE FUNÇÕES

Pode-se definir operações de adição e multiplicação de funções reais do seguinte modo.

Definição de adição. Sejam $f: A \to \mathbf{R}$ e $g: A \to \mathbf{R}$ duas funções reais com os mesmos campos de definição. A função $s: A \to \mathbf{R}$ definida por

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

para todo $x \in A$, é chamada a *soma* das funções f e g, e se designa por $f + g$.

Definição da multiplicação. Sejam $f: A \to \mathbf{R}$ e $g: A \to \mathbf{R}$ duas funções reais definidas sôbre o mesmo subconjunto A dos reais. A função $p: A \to \mathbf{R}$ definida por

$$p(x) = f(x)\, g(x)$$

para todo $x \in A$, é chamada o produto das funções f e g, e se designa por fg.

Observação. O leitor pode ver fàcilmente que as duas operações, acima definidas no conjunto das funções reais do tipo $f: A \to \mathbf{R}$, satisfazem às leis comutativa, associativa e distributiva. Isso decorre do fato de serem os reais um corpo, cf. seção 1.4.

Um caso particular da multiplicação é aquêle em que $g(x)$ é uma função constante, isto é, $g(x) = a$ para todo $x \in A$. Portanto,

af, onde a é número real, é a função real definida por $(af)(x) = a f(x)$.

Definição da função $|f|$. Seja $f : A \to \mathbf{R}$ uma função real. A função $|f| : A \to \mathbf{R}$ é definida por

$$|f|(x) = |f(x)|$$

para todo $x \in A$.

Definição da função $1/f$. Seja $f : A \to \mathbf{R}$ uma função real tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. A função $1/f : A \to \mathbf{R}$ é definida por

$$(1/f)(x) = 1/f(x)$$

para todo $x \in A$.

Agora enunciamos algumas propriedades do limite de funções em um ponto.

Teorema 2.2. *Sejam* $f : A \to \mathbf{R}$ e $g : A \to \mathbf{R}$ *duas funções reais definidas em um subconjunto* A *de* $\mathbf{R}$. *Então*:

(a) *Se os limites à direita de* f *e* g *no ponto* c *existem, então as funções* $f + g$, fg e $|f|$ *tem limite à direita no ponto* c *e:*

(1) $$\lim_{x \to c+} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c+} f(x) + \lim_{x \to c+} g(x)$$

(2) $$\lim_{x \to c+} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c+} f(x) \cdot \lim_{x \to c+} g(x)$$

(3) $$\lim_{x \to c+} |f(x)| = \left|\lim_{x \to c+} f(x)\right|$$

(b) *Enunciado análogo para os limites à esquerda.*

(c) *Se os limites de* f *e* g *no ponto* c *existem, então, as funções* $f + g$, fg *e* $|f|$ *tem limite no ponto* c *e*

(4) $$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

(5) $$\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

(6) $$\lim_{x \to c} |f(x)| = \left|\lim_{x \to c} f(x)\right|$$

Demonstração. Para ilustrar demonstremos a relação (1); as relações (2), (3) e as análogas para o limite à esquerda têm demonstrações semelhantes. Seja (x_n) uma sucessão decrescente contida em A e convergindo para c. Como f e g têm limite à direita no ponto c, temos que $(f(x_n))$ converge para $f(c+)$ e $(g(x_n))$ converge para $g(c+)$. Então, a sucessão $(f(x_n) + g(x_n))$ converge para $f(c+) + g(c+)$, em virtude da propriedade 1 para limites de sucessões. Logo, o limite à direita de $f + g$ no ponto c existe e satisfaz a relação (1). A parte (c) do teorema é conseqüência imediata das partes (a) e (b).

Teorema 2.3. *Seja* $f : \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ *uma função real definida em um subconjunto* A de **R**. *Suponhamos que* $f(x) \neq 0$ *para* $x \in \mathrm{A}$. *Então:*

(a) *Se o limite à direita de* f *no ponto* c *existe e é diferente de zero, então o limite à direita de* $1/f$ *no ponto* c *existe, e*

(7)
$$\lim_{x \to c+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to c+} f(x)} .$$

(b) *Enunciado análogo para o limite à esquerda.*

(c) *Se o limite de* f *no ponto* c *existe e é diferente de 0, então, o limite de* $1/f$ *existe, e*

$$\lim_{x \to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to c} f(x)} .$$

Demonstração de (a). Seja (x_n) uma sucessão decrescente contida em A e convergindo para c. Então, em virtude da propriedade 3 para limites de sucessões, a sucessão $\{1/f(x_n)\}$ converge para $1/\lim f(x_n)$. Mas, a existência do limite à direita de f no ponto c implica que $1/\lim f(x_n) = 1/f(c+)$. Logo, a função $1/f$ tem limite à direita no ponto c, o qual satisfaz a relação (7). A parte (b) tem uma demonstração análoga, A parte (c) é uma conseqüência das partes (a) e (b).

Exercício 1. Sejam $f : \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ duas funções reais definidas em um certo subconjunto A dos reais, tais que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathrm{A}$. Se f e g têm limite em um certo ponto c, mostre que $\lim\limits_{x \to c} f(x) \leq \lim\limits_{x \to c} g(x)$.

Exercício 2. Se no exercício anterior tivermos $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathrm{A}$, dê um contra-exemplo para mostrar que, em geral, não se tem $\lim\limits_{x \to c} f(x) < \lim\limits_{x \to c} g(x)$.

Exercício 3. Sejam f, g e h funções reais definidas em um conjunto $A \subset \mathbf{R}$. Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in A$ e se os limites de f e h existem e são iguais em um ponto c, prove que g também tem limite em c e $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x)$.

Exercício 4. Enuncie e demonstre resultados análogos aos do teoremas 2.2 e 2.3 para o caso que dos limites de $f(x)$ e $g(x)$ quando $x \to +\infty$ (ou $x \to -\infty$).

Exercício 5. Prove que $\lim_{x \to c} f(x) = r$ e $\lim_{x \to c} g(x) = +\infty$ implica

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

e $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \pm\infty$, conforme $r > 0$ ou $r < 0$.

Exercício 6. Dê exemplos para provar que a última relação do problema 5 não se verifica, em geral, no caso de $r = 0$.

Exercício 7. Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ uma função positiva, i.e., $f(x) > 0$ para todo $x \geq a$. Prove que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se, e só se, $\lim_{x \to +\infty} [1/f(x) = 0$.

Exercício 8. Considere dois polinômios $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ e $Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$, cujos coeficientes $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ são números reais e $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. Os inteiros n e m são os *graus* de P e Q, respectivamente. Um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais, isto é, a equação $P(x) = 0$ tem no máximo n soluções reais (não necessàriamente diferentes). Portanto para todo x real, diferente das raízes de $Q(x)$, podemos definir uma função pela expressão $f(x) = P(x)/Q(x)$. Problema: calcule os limites de $f(x)$ quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. Considere os diferentes casos: $n > m$, $n = m$ e $n < m$.

Observação. O "teorema fundamental da álgebra" diz que um polinômio $P(x)$ de grau n tem exatamente n raízes complexas (não necessàriamente diferentes). Observe que o conjunto dos números complexos inclue o conjunto dos números reais; portanto algumas das raízes (ou mesmo tôdas, dependendo do polinômio) de $P(x)$ podem ser reais. Uma demonstração do teorema fundamental da álgebra pode ser encontrada na referência (11).

2.4. FUNÇÕES CONTÍNUAS

Seja I um intervalo de qualquer um dos tipos seguintes: (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, (a, ∞), $(-\infty, b]$, $[-a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$. Uma função real $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ se diz *contínua em um ponto* c *do interior de* I *se*

$$f(c) = f(c+) = f(c-).$$

Se o intervalo contém a extremidade a, então a função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ é dita *contínua em* a se $f(a) = f(a+)$. Se o intervalo I contém a extremidade b, então a função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ é dita *contínua em* b se $f(b) = f(b-)$. Uma função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ se diz *contínua no intervalo* I se ela fôr contínua em todos os pontos de I. Será útil para futuras referências introduzir as terminologias: f *contínua à direita* em c se $f(c) = f(c+)$ e f *contínua à esquerda em* c se $f(c) = f(c-)$.

Exemplos da seção 2.1. É fácil ver que as funções (i), (v) e (vii) são contínuas em $\mathbf{R}$. A função (ii) é contínua no intervalo $[0, 1]$. A função (iii) não é contínua para $x = 0$. A função (iv) é contínua em $(1, 2]$. A função (vi) é contínua em $[0,+\infty)$. A função (viii) não é contínua em $x = 0$. A função (ix) não é contínua para $x \in \mathbf{Z}$. As restrições da função (x) às semi-retas $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ são contínuas. A função (x) não está definida em $x = 0$; o leitor pode ver fàcilmente que não é possível definí-la aí de modo que a função resultante seja contínua; de fato, já observamos que $f(0+)$ e $f(0-)$ não existem para a função (x).

Os pontos onde uma função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ não é contínua são chamados *pontos de descontinuidade.* Costuma-se dizer que a função tem uma *descontinuidade* em tal ponto. A *descontinuidade* é de *primeira espécie* se os limites à direita e à esquerda existem, mas são diferentes. Qualquer outro tipo de descontinuidade é chamada de *segunda* espécie. Nos exemplos (viii) e (ix) da seção 2.1 as descontinuidades são de primeira espécie. A função $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ apresentada na seção 2.2 tem uma descontinuidade de segunda espécie em $x = 0$. As seguintes funções têm também descontinuidades de segunda espécie em $x = 0$.

Exemplos:

(xi) $$f(x) = 1/x \quad \text{para } x \neq 0$$
$$f(0) = 0$$

(xii) $$f(x) = 1/x \quad \text{para } x > 0$$
$$f(x) = x \quad \text{para } x \leq 0.$$

Em um ponto c onde uma função f tem os limites à direita e à esquerda, define-se o *salto* de f como sendo $f(c+) - f(c-)$. Se uma função é contínua o salto é igual a 0. A recíproca não é verdadeira: o salto pode ser 0 sem que a função seja contínua naquele ponto. Exemplo: $f(x) = x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Nos pontos de descontinuidade de la espécie, o salto está sempre definido e é um número real positivo, negativo, ou mesmo nulo, como acabamos de exemplificar.

Teorema 2.4. *Uma função $f: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ definida em um intervalo I é contínua em um ponto $c \in \mathrm{I}$ se, e só se, para tôda sucessão (x_n) em I, temos que*

$$x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to f(c).$$

Demonstração. Suponhamos que f seja contínua em c. Então f tem limite no ponto c, e $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Se (x_n) é uma sucessão convergindo para c, tal que para $n \geq n_0$ tem-se $x_n \in \mathrm{I} \setminus \{c\}$, então pelo teorema 2.1, segue-se que $f(x_n) \to f(c)$. Se não existe tal n_0, então (x_n) é formada de duas subsucessões (x_{n_j}), tal que $x_{n_j} = c$ para todo j, e (x_{m_j}), tal que $x_{m_j} \in \mathrm{I} \setminus \{c\}$ para todo j. É claro que $f(x_{n_j}) \to f(c)$, pois $f(x_{n_j}) = f(c)$. E pelo teorema 2.1, $f(x_{m_j}) \to f(c)$. Logo $f(x_n) \to f(c)$. (Veja exercício abaixo.) Recìprocamente, se para qualquer sucessão $(x_n) \subset \mathrm{I} \setminus \{c\}$ convergindo para c, temos que $f(x_n) \to f(c)$, então pelo teorema 2.1, segue-se que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Isto prova a continuidade de f em c.

Deixamos ao leitor a demonstração do seguinte

Teorema 2.5. *Seja $f: \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ uma função definida em um intervalo I. Então, f é contínua em $c \in \mathrm{I}$ se, e só se, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, existe um $\delta > 0$ tal que*

$$x \in \mathrm{I}, \ |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

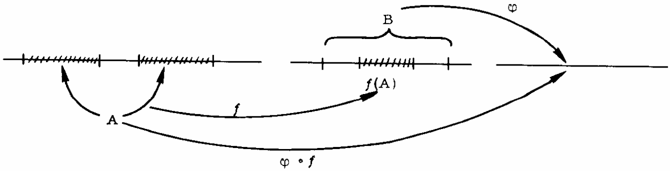
Exercício. Seja (x_n) uma sucessão formada de duas subsucessões (x_{n_j}) e (x_{m_j}). Mais precisamente, **N** se decompõe em dois conjuntos infinitos N_1 e N_2, (x_{n_j}) é a restrição de (x_n) a N_1, isto é, $n_j \in \mathrm{N}_1$, e (x_{m_j}) é tal que $m_j \in \mathrm{N}_2$. Suponha que $x_{n_j} \to r$ e $x_{m_j} \to r$. Prove que $x_n \to r$.

Definição da função composta. Sejam $f: \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ e $\varphi: \mathrm{B} \to \mathbf{R}$ duas funções reais tais que a imagem $f(\mathrm{A})$ está contida em B, A função $h: \mathrm{A} \to \mathbf{R}$ definida por

$$h(x) = \varphi(f(x))$$

para todo $x \in A$ é chamada a *função composta* de f e φ, e se designa por $\varphi \circ f$.

Fig. 13



Teorema 2.6. *Sejam $f : A \to \mathbf{R}$ e $\varphi : B \to \mathbf{R}$ duas funções reais, tais que $f(A) \subset B$. Suponha que f tem limite em um ponto c, e seja m tal limite. Suponha que φ é contínua no ponto m, Então, a função composta $\varphi \circ f$ tem limite no ponto c e*

$$\lim_{x \to c} \varphi(f(x)) = \varphi(m)$$

Demonstração. Seja (x_n) uma sucessão contida em $A \setminus \{c\}$ convergido para c. Pela hipótese sôbre f segue-se que $f(x_n) \to m$. Como φ é contínua, usamos o teorema 2.4 para obter $\varphi(f(x_n)) \to \varphi(m)$. Ora, isso é verdade para tôda sucessão $(x_n) \subset A \setminus \{c\}$ convergindo para c. Logo, pelo teorema 2.1, o resultado se segue.

2.5. OPERAÇÕES COM FUNÇÕES CONTÍNUAS

Usando as propriedades de limites de função, obtemos fàcilmente os seguintes resultados. Algumas das demonstrações ficam a cargo do leitor.

Teorema 2.7. *A soma de duas funções contínuas $f : I \to \mathbf{R}$ e $g : I \to \mathbf{R}$ definidas em um mesmo intervalo I é contínua.*

Teorema 2.8. *O produto de duas funções contínuas $f : I \to \mathbf{R}$ e $g : I \to \mathbf{R}$ definidas em um intervalo I é contínua.*

Corolário 2.1. *Se $f : I \to \mathbf{R}$ é uma função contínua em um intervalo I, e a é um número real, então, a função af é contínua.*

Demonstração. Use o teorema 2.8 com a função g constante e igual a a.

Corolário 2.2. *A diferença $(f - g)$ de duas funções contínuas $f : I \to \mathbf{R}$ e $g : I \to \mathbf{R}$ em um intervalo I é contínua.*

Demonstração. Do corolário 2.1 segue-se que $-g$ é contínua. Portanto, o resultado se segue pela aplicação do teorema 2.7 a f e $-g$.

Teorema 2.9. *Se* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *é uma função contínua em um intervalo* I *e* $f(x) \neq 0$ *para todo* x *em* I, *então, a função* $1/f(x)$ *é contínua em* I.

Corolário 2.3. *Se* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *e* $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *são funções contínuas em um intervalo* I *e* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in \mathrm{I}$, *então, a função* g/f *é contínua em* I.

Demonstração. Direta a partir dos teoremas 2.8 e 2.9.

Teorema 2.10. *Se* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *é uma função contínua em um intervalo* I, *então, a função* $|f|$ *é também contínua em* I.

Teorema 2.11. *Sejam* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *e* $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ *duas funções contínuas em intervalos* I *e* J, *e tais que a imagem* $f(\mathrm{I})$ *esteja contida em* J. *Então, a função composta* $\varphi \circ f$ *é contínua em* I.

Demonstração. Provemos a continuidade em um ponto c. Como f é contínua em c temos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. E, como a função φ é contínua em $f(c)$, temos que $\lim\limits_{y \to f(c)} \varphi(y) = \varphi(f(c))$. Pelo teorema 2.6 sôbre limites de funções compostas temos que

$$\lim_{x \to c} \varphi(f(x)) = \varphi(f(c)),$$

o que mostra que $\varphi \circ f$ é contínua em c.

Exercício. Sejam $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ e $g : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ duas funções contínuas definidas em um intervalo I. Mostre que as funções

$$h(x) = \max[f(x), g(x)]$$

$$k(x) = \min[f(x), g(x)]$$

são contínuas em I. (Observe como as funções h e k são definidas: dado $x \in \mathrm{I}$, considere os dois números reais $f(x)$ e $g(x)$, e defina $h(x)$ como sendo o maior dos dois, e $k(x)$ como o menor.) Sugestão: prove primeiro que

$$\max[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

$$\min[f(x), g(x)] = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].$$

2.6. FUNÇÕES CONTÍNUAS EM INTERVALOS FECHADOS

Uma função $f : A \to \mathbf{R}$ definida em um subconjunto A dos reais é dita *limitada superiormente* se existe um número real M tal que

(1) $$f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \in A.$$

Em outras palavras, usando a terminologia introduzida na seção 1.3: f é limitada superiormente se a imagem $f(A)$ tem uma cota superior. Portanto, o M da relação (1) pode ser qualquer cota superior. Pelo Postulado de Dedekind, o conjunto $f(A)$, no caso de uma função limitada superiormente, tem um supremo. Definimos, então, o *supremo da função* f (em símbolos sup f) como sendo o *supremo do conjunto* $f(A)$.

Anàlogamente, uma função $f : A \to \mathbf{R}$ definida em um conjunto $A \subset \mathbf{R}$ é dita *limitada inferiormente* se existe um número real N tal que

$$f(x) \geq N, \quad \text{para todo } x \in A.$$

O *ínfimo de* f, que se designa por inf f, é definido como sendo o ínfimo do conjunto $f(A)$.

Exemplos: As funções (i), (ix) e (x) definidas na seção 2.1 não têm nem supremo nem ínfimo. É comum dizer-se que o supremo de f é $+\infty$ quando tal supremo não existe. Anàlogamente, usa-se a convenção inf $f = -\infty$ se o ínfimo não existe. Para algumas das outras funções definidas na seção 2.1, temos:

(ii) $\inf f = 0$, $\sup f = 1$. (iii) $\inf f = 0$ e $\sup f = 2$.
(v) $\inf f = 0$, $\sup f = +\infty$. (vii) $\inf f = 0$ e $\sup f = +\infty$.

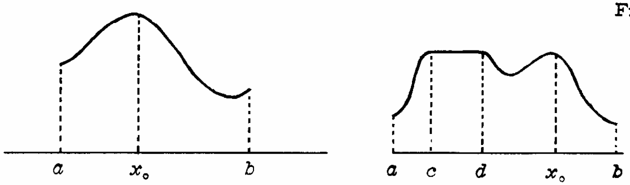
Uma função $f : A \to \mathbf{R}$ definida em um conjunto $A \subset \mathbf{R}$ é dita *limitada* se fôr limitada superiormente e limitada inferiormente. As funções dos exemplos (ii), (iii), (iv) e (viii) são limitadas. É claro que uma função f é limitada se, e só se, existe $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$.

Dada uma função limitada superiormente, pode existir ou não um ponto $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = \sup f$. Para a função (iii) não existe um tal x_0, enquanto que para a função (iv) existe. Diz-se que a função *assume máximo* em A quando existe um tal x_0, e o número sup f é chamado de *máximo* de f. Considerações análogas para o ínfimo: quando existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = \inf f$, então, o inf f é chamado o *mínimo* de f e diz-se que a função *assume mínimo* em A.

Teorema 2.12. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então, f assume máximo e mínimo em $[a, b]$.*

Observação. A existência de um tal ponto parece óbvia a partir do exame do gráfico da função contínua f, cf. figura 14. Entretanto, não devemos basear nossas demonstrações em argumentos geométricos com os gráficos, pois, em certos casos o gráfico pode ser complicado e difícil de visualizar. Como, por exemplo, o gráfico da função de Dirichlet definida na seção 1.1.

Fig. 14



Para a demonstração do teorema 2.12 necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2.1. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada.*

Demonstração. Vamos mostrar que f é limitada superiormente. De modo análogo demonstraríamos que f é limitada inferiormente. Suponhamos, por contradição, que f não fosse limitada superiormente. Logo, dado $n \in \mathbf{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) > n$. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (seção 2.10), (x_n) contém uma subsucessão (x_{n_j}) convergente, seja r o seu limite. Pela continuidade da f, segue-se (teorema 2.4) que $f(x_{n_j}) \to f(r)$. Portanto, a partir de um certo n_j temos

$$f(x_{n_j}) < f(r) + 1.$$

Isto, porém, contradiz o fato de que $f(x_{n_j}) > n_j$. O lema está provado.

Demonstração do teorema 2.12. Seja M o sup de f em $[a, b]$, o qual existe, em virtude do lema 2.1. Dado $n \in \mathbf{N}$, existe $x_n \in$ $\in [a, b]$ tal que $M - f(x_n) < 1/n$. Pois, se não existisse, então $M - f(x) \geq 1/n$ para todo $x \in [a, b]$ e daí $M - 1/n \geq f(x)$, o que contradiz o fato de M ser o sup de f. Construímos dêste modo uma sucessão (x_n). Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, segue-se que (x_n) contém uma subsucessão convergente (x_{n_j}), e seja r seu limite. Pela continuidade de f, segue-se (teorema 2.4) que

$f(x_{n_j}) \to f(r)$. Como $M - f(x_{n_j}) < 1/n_j$, concluímos por propriedades de limites de sucessões (propriedade 6, seção 1.7) que $M = f(r)$, como queríamos provar.

Outro resultado que também parece razoável a partir da análise do gráfico de uma função contínua é o seguinte teorema, conhecido como o Teorema do Valor Intermediário.

Teorema 2.13. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$. Então, a função f assume todos os valôres entre $f(a)$ e $f(b)$. Em outras palavras, a imagem $f([a, b])$ contém o intervalo fechado com extremidades $f(a)$ e $f(b)$.*

A demonstração utiliza os seguintes lemas.

Lema 2.2. *Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função contínua em intervalo I. Suponhamos que, para um ponto $x_0 \in I$, se tenha $f(x_0) < c$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo $x \in I$ tal que $|x - x_0| \leq \varepsilon$.*

Demonstração por contradição. Suponha que, qualquer que seja n, exista $x_n \in I$ tal que $|x_n - x_0| < 1/n$ e $f(x_n) \geq c$. A sucessão (x_n) assim construída converge para x_0. Pela continuidade de f, segue-se (teorema 2.4) que $f(x_n) \to f(x_0)$. Daí decorreria $f(x_0) \geq$ $\geq c$, o que contradiz a hipótese $f(x_0) < c$.

Lema 2.3. *f como no lema 2.1. Suponhamos que, para $x_0 \in I$, $f(x_0) > d$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > d$ para todo $x \in I$ e $|x - x_0| \leq \varepsilon$.*

Demonstração. Aplique o lema 2.2 à função $g(x) = -f(x)$.

Demonstração do teorema 2.13. Para fixar as idéias, suponhamos que $f(a) < f(b)$, e seja c um ponto do intervalo $(f(a), f(b))$. Queremos provar que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$. Seja $A =$ $= \{x \in [a, b] : f(x) \leq c\}$. O conjunto A é não vazio, e b é uma cota superior para êle. Logo, o supremo de A existe; seja x' tal sup. É claro que $x' \leq b$. Além disso, $x' < b$. De fato, sendo $f(b) > c$ segue-se pelo lema 2.3 que existe um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in$ $\in [b - \varepsilon, b]$ temos $f(x) > c$. Logo, os x dêsse intervalo são cotas superiores do conjunto A e, portanto, b não pode ser o supremo de A. Agora, provemos que $f(x') = c$. Suponhamos que $f(x') < c$, então, pelo lema 2.2 segue-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < c$ para todo $x \in [x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$, o que contradiz o fato de x' ser o sup de A. A outra possibilidade, $f(x') > c$ também não ocorre, pois, usando o lema 2.3 ter-se-ia um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > c$ para todo $x \in [x' - \varepsilon, x' + \varepsilon]$, o que mostra que $x' - \varepsilon$ é cota superior para para o conjunto A; isso contradiz o fato de x' ser o supremo de A. Logo, $f(x')$ deve ser igual a c, o que prova o teorema.

2.7. FUNÇÕES MONÓTONAS

Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo I. Damos as seguintes definições:

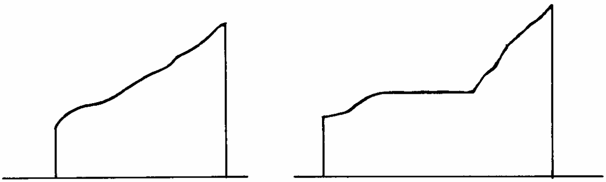
f é ***crescente*** se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I

f é ***decrescente*** se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I

f é ***não decrescente*** se $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I

f é ***não crescente*** se $f(x_1) \geq f(x_2)$ para $x_1 < x_2$ em I.

Fig. 15



crescente — não decrescente

É claro que tôda função crescente é não decrescente, e tôda função decrescente é não crescente. Òbviamente, êsses conceitos sôbre a variação de uma função nada têm a ver com continuidade, cf. exemplos (viii) e (ix) da seção 2. 1. Usa-se a expressão *monótona* para qualquer um dos quatro tipos de funções acima definidas.

Teorema 2.14. *Uma função não decrescente* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *definida em um intervalo* I *tem limites laterais em todos os pontos de* I.

Observação. É claro que se $c \in \mathrm{I}$ é uma extremidade de I, então só existe *um* dos limites laterais. Se uma das extremidades do intervalo I não pertence a I, então o limite lateral em c pode não existir, cf. exemplo (x) da seção 2. 1.

Demonstração do teorema 2.14. 1) Seja c um ponto do interior de I ou a extremidade direita no caso desta pertencer ao intervalo I. Provemos que o limite à esquerda de f no ponto c existe. Considere o conjunto A dos $f(x)$ para $x < c$. Como $f(c)$ é uma cota superior para A, segue-se pelo Postulado de Dedekind que A tem supremo, que designamos por m. Seja agora (x_n) uma sucessão crescente contida em I e convergindo para c. Como f é não decrescente, $(f(x_n))$ é uma sucessão não decrescente e, portanto, converge, e seja d o seu limite. É claro que $d \leq m$. Se $d < m$ então existe $x < c$ tal que: (*) $d < f(x)$. Como $x_n \to c$ segue-se que existe n tal que $x < x_n$ e daí $f(x) \leq f(x_n)$. Esta desigualdade juntamente com (*) dá $d < f(x_n)$, o que contradiz o fato de a sucessão não decrescente $(f(x_n))$ convergir para d. Logo $(f(x_n))$ converge para m, qualquer que seja a sucessão (x_n) crescente, contida em I e convergindo para c. Isso mostra que $f(c-)$ existe e é igual a m.

2) Se c é um ponto interior ou a extremidade esquerda no caso desta pertencer ao intervalo, então, $f(c+)$ existe. De modo análogo ao procedimento da primeira parte, provamos que $f(c+)$ é o ínfimo do conjunto dos $f(x)$ para $x > c$.

Nota. Decorre da demostração acima, que se f é não decrescente e c é um ponto interior, então

$$(1) \qquad f(c-) \leq f(c) \leq f(c+).$$

Corolário 2.4. *Tôda função não crescente $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$, onde* I *é um intervalo, tem limites laterais nos pontos de* I.

Demonstração. A função $-f$ é não decrescente. Pelo teorema 2.14 $-f$ tem os limites laterais. Pelas propriedades dos limites laterais de funções, cf. seção 2.3, segue-se que f também tem os limites laterais nos pontos de I.

2.8. A FUNÇÃO INVERSA

Seja $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ uma função injetiva definida em um conjunto A e tomando valôres em um conjunto B. Relembremos que f injetiva significa $f(x_1) \neq f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ em A; cf. seção 1.1. Para uma tal f, pode-se definir a *função inversa* $f^{-1} : f(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$, que tem por domínio a imagem $f(\mathrm{A})$ e por contradomínio o conjunto A, do seguinte modo: para $y \in f(\mathrm{A})$ temos $f^{-1}(y) = x$, onde $x \in \mathrm{A}$ é o elemento (único, por ser f injetiva) tal que $f(x) = y$.

Observe que $f^{-1} : f(\mathrm{A}) \to \mathrm{A}$ é sobrejetiva. Òbviamente tôda função crescente (ou decrescente) é injetiva. Para funções contínuas vale uma recíproca dêste fato: "tôda função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ injetiva contínua é ou crescente ou decrescente". Isso será provado na seção 2.9.

Lema 2.4. *Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função contínua crescente em um intervalo* I. *Então, a imagem $f(\mathrm{I})$ é um intervalo. Além disso, se c pertence ao interior de* I, *então $f(c)$ pertence ao interior de $f(\mathrm{I})$.*

Observação. O teorema acima nos diz então que se I é um intervalo aberto (a, b), então $f(\mathrm{I})$ é também um intervalo aberto (c, d). onde uma ou ambas as extremidades podem ser infinitas. Se I é um intervalo fechado $[a, b]$, então, $f(\mathrm{I})$ é também um intervalo fechado. Intervalos do tipo $[a, b)$ são transformados em intervalos do tipo $[c, d)$, onde d pode ser $+\infty$. Dê exemplos das várias possibilidades. Sugestão: funções como $f(x) = -1/x$ para $x > 0$, e $g(x) = 1/(1 + x^2)$ para todo $x \in \mathbf{R}$ podem ajudar.

Demonstração do lema 2.4. 1) Para mostrar que $f(\mathrm{I})$ é um intervalo, o que devemos fazer é provar que se y_1 e y_2, $y_1 < y_2$, pertenecem a $f(\mathrm{I})$, então, o intervalo $[y_1, y_2]$ está contido em $f(\mathrm{I})$. Sejam x_1 e x_2 os pontos de I tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Logo, devemos provar que $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(\mathrm{I})$. Isto, porém, decorre do teorema do valor intermediário, cf. teorema 2.13.

2) Seja agora c um ponto do interior de I. Seja $\varepsilon > 0$, tal que $[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset \mathrm{I}$. Pela primeira parte dêste teorema, já provada, a imagem do intervalo $[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ é um intervalo J, cujas extremidades são $f(c - \varepsilon)$ e $f(c + \varepsilon)$. Sendo f crescente, segue-se que $f(c - \varepsilon) < f(c) < f(c + \varepsilon)$, o que mostra que $f(c)$ é um ponto do interior de J, e, a fortiori, de $f(\mathrm{I})$.

Teorema 2.15. *Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função contínua crescente em um intervalo* I. *Então, a função inversa $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathbf{R}$ é também contínua.*

58 **Demonstração.** Primeiramente, observamos que a função inversa é também crescente. Logo, os limites laterais existem em todos os pontos do intervalo $f(\mathrm{I})$. Vamos provar que se d pertence ao interior de $f(\mathrm{I})$, então $f^{-1}(d-) = f^{-1}(d) = f^{-1}(d+)$. (O caso em que $d \in f(\mathrm{I})$ é uma extremidade pode ser atacado pelo mesmo processo.) Pela Nota da seção 2.7 temos que

$$f^{-1}(d-) \leq f^{-1}(d) \leq f^{-1}(d+)$$

Suponhamos que $f^{-1}(d-) < f^{-1}(d)$. Como $f^{-1}(d-)$ é o supremo dos $f^{-1}(y)$ tais que $y < d$, segue-se que existe $y_n < d$ e $y_n \to d$ tal que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(d-)$. Como f é crescente temos

$$(1) \qquad y_n < f(f^{-1}(d-))$$

Por outro lado, da hipótese $f^{-1}(d-) < f^{-1}(d)$, e do fato de f ser crescente temos

$$(2) \qquad f(f^{-1}(d-)) < f(f^{-1}(d)) = d\,.$$

As desigualdades (1) e (2) implicam que

$$\lim y_n \leq f(f^{-1}(d-)) < d,$$

o que contradiz o fato de (y_n) convergir para d. De modo análogo prova-se que $f^{-1}(d) < f^{-1}(d+)$ não pode ocorrer.

Corolário 2.5. *Seja* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *uma função contínua decrescente em um intervalo* I. *Então, a função inversa* $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathbf{R}$ *é também contínua.*

Demonstração. A função $g = -f$ é crescente. Por conseguinte, pelo teorema anterior $g^{-1} : g(\mathrm{I}) \to \mathbf{R}$ é contínua. Ora, $g(\mathrm{I}) = -f(\mathrm{I})$ e $f^{-1}(y) = g^{-1}(-y)$ para todo $y \in f(\mathrm{I})$. A continuidade de f^{-1}, segue-se usando o teorema 2.11, pois a função f^{-1} é a composta da função contínua g^{-1} e dá função contínua

$$h : \mathbf{R} \to \mathrm{R}$$

definida por $h(x) = -x$, para todo $x \in \mathbf{R}$.

2.9. AS FUNÇÕES INJETIVAS DA RETA

Teorema 2.16. *Seja* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *uma função contínua e injetiva definida em um intervalo* I. *Então,* f *é uma função crescente ou uma função decrescente.*

Demonstração. (1) Sejam $a, b \in \mathrm{I}$, com $a < b$. Sendo f uma injetiva, segue-se que um dos dois casos deve ocorrer:

(1.i) $\qquad f(a) < f(b);$ $\qquad$ (1.ii) $\qquad f(a) > f(b).$

(2) Sejam $a, b, c \in \mathrm{I}$, com $a < b < c$. Provemos que um dos dois casos deve ocorrer:

(2.i) $\qquad f(a) < f(b) < f(c);$ $\qquad$ (2.ii) $\qquad f(a) > f(b) > f(c).$

Suponhamos, em vista da parte (1) acima, que $f(a) < f(c)$. (A outra possibilidade poderá ser tratada com um raciocínio análogo.) Devemos provar que o caso (2.i) ocorre. Suponhamos, por contradição, que $f(a) > f(b)$. Seja r um número real comum aos intervalos $(f(b), f(a))$ e $(f(b), f(c))$. Pelo teorema do valor intermediário existem pontos $x_1 \in (a, b)$ e $x_2 \in (b, c)$ tais que $f(x_1) = r$ e $f(x_2) = r$. Isso, porém, contradiz a injetividade da função f. De modo inteiramente análogo, provemos que $f(b) > f(c)$ não pode ocorrer.

(3) Sejam $a, b, c, d \in \mathrm{I}$, com $a < b < c < d$. Provemos que um dos dois casos deve ocorrer:

(3.i) $\quad f(a) < f(b) < f(c) < f(d);$ $\qquad$ (3.ii) $\qquad f(a) > f(b) > f(c) > f(d).$

Suponhamos, em vista da parte (2) acima que

(1) $$f(a) < f(b) < f(c).$$

(A outra possibilidade, i.e. (2.ii), poderá ser tratada de modo análogo.) Devemos provar que, feita esta hipótese, i.e. desigualdade (1), o caso (3.i) ocorre. Consideremos os pontos b, c, d. Aplicando a parte (2) novamente, concluímos que

$$f(b) < f(c) < f(d), \tag{2}$$

pois a outra possibilidade está descartada em virtude de já sabermos que $f(b) < f(c)$. As desigualdades (1) e (2) dão (3.i).

(4) Provemos, finalmente, que f é crescente ou decrescente. Fixemos dois pontos $a, b \in I$, $a < b$. Em vista da parte (1), temos $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$. Provaremos que no primeiro caso a função é crescente, e que no segundo, ela é decrescente. Consideremos o primeiro caso. Sejam x e y pontos quaisquer de I com $x < y$, e provemos que $f(x) < f(y)$.

O que devemos fazer é ver a localização dos pontos x e y em relação a a e b. No entanto em qualquer caso decorrerá a igualdade procurada. Por exemplo, se $x < y < a < b$, decorre, em vista da parte (3) e de já sabermos que $f(a) < f(b)$, que $f(x) < f(y) < < f(a) < f(b)$. Deixamos ao leitor a consideração (inteiramente análoga) dos demais casos das posições de x e y, bem como o caso $f(a) > f(b)$.

2.10. AS FUNÇÕES LINEARES

Um tipo particularmente importante de funções reais é dado pelas funções lineares, que definiremos a seguir. Sejam a e b dois números reais dados. A função $f : \mathrm{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = ax + b \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbf{R}$ e chamada uma ***função linear***. O nome linear provém de que, como analisaremos abaixo, o gráfico de f é uma reta. A continuidade de f é imediata.

O gráfico de $f(x)$. Para $x = 0$ temos $f(x) = b$. Logo, o gráfico de f passa pelo ponto $(0, b)$. Se $b = 0$, o gráfico da f correspondente, $f(x) = ax$, passa pela origem. Consideremos êsse caso primeiro. Há três possibilidades:

1a). $a = 0$. Neste caso $f(x) = 0$, e o gráfico de f, neste caso, é simplesmente o eixo dos x.

2a.) $a > 0$. Sejam x_1 e x_2 dois reais diferentes de zero e designemos: $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Como $y_1 = ax_1$ e $y_2 = ax_2$, temos

(2) $$y_1/x_1 = y_2/x_2$$

Observe que para (x, y) no gráfico, os números x e y têm o mesmo sinal. Logo, se são negativos temos $y/x = |y|/|x|$. À vista disso, a relação (2) implica que os triângulos $0px_1$ e $0qx_2$ das figuras abaixo são semelhantes.

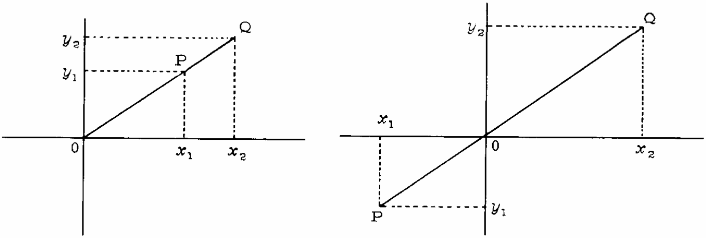


Fig. 16

Portanto, os pontos (x, y) do gráfico de $f(x) = ax$ são precisamente os pontos de uma reta passando pela origem:

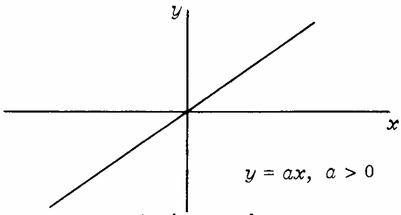


Fig. 17

3a.) $a < 0$. Como no caso anterior, podemos provar que o gráfico de $f(x) = ax$ é uma reta passando pela origem como mostra a figura 18.

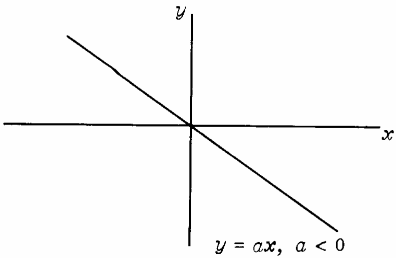


Fig. 18

Para o caso geral, $f(x) = ax + b$, o gráfico é o transladado do gráfico de $g(x) = ax$ por b no sentido vertical. Assim, por exemplo:

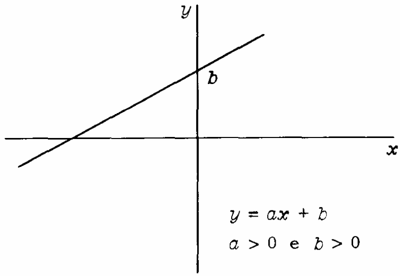


Fig. 19

A equação de uma reta. Dada uma reta R em um plano coordenado (x, y), ela é o gráfico de uma função linear, se R não fôr paralela ao eixo dos y. De fato, devemos determinar os parâmetros a e b que determinam a função linear correspondente a R. Para isso tomamos dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de R e, como êsses pontos devem pertencer ao gráfico da função linear procurada, escrevemos

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{e} \quad y_2 = ax_2 + b \tag{3}$$

Temos, assim, em (3) um sistema de duas equações com incógnitas a e b. Resolvendo, obtemos

$$a = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad b = (x_2 y_1 - x_1 y_2)/(x_2 - x_1) \tag{4}$$

É claro que os denominadores são diferentes de zero, pois, estamos tomando pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) distintos, o que implica $x_1 \neq x_2$, pois, a reta não é paralela ao eixo dos y. As expressões (4) serão simplificadas se um dos pontos escolhidos de R fôr o ponto $(0, y_2)$ onde R corta o eixo dos y, e o outro fôr o ponto $(x_1, 0)$ onde R corta o eixo dos x. Então

$$a = -y_2/x_1 \quad \text{e} \quad b = y_2 \tag{5}$$

Conclusão. O gráfico de qualquer função linear $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela ao eixo dos y, e vice-versa. Daí dizermos que $y = ax + b$ é a *equação geral das retas não paralelas ao eixo dos* y. Obviamente, retas paralelas ao eixo dos y têm equações da forma $x = c$.

Definição. O número a é chamado o *coeficiente angular* da reta $y = ax + b$.

Exercício 1. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função contínua tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todos x e y em R. Prove que f é linear, ou mais precisamente, da forma ax. (Sugestão: Prove que $f(2) = 2f(1)$, e daí calcule $f(n)$ e $f(1/n)$ para n inteiro positivo, e $f(r)$ para r racional. Usando a continuidade da f, calcule por fim $f(x)$ para x real qualquer. Não esqueça os reais negativos!)

Observação. Pode-se demonstrar, usando a noção de base de Hamel para os reais, que a equação funcional $f(x + y) = f(x) + f(y)$ tem soluções $f(x)$ que não são da forma ax, e portanto são funções descontínuas.

Exercício 2. Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

e

$$f(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad x \geq 0.$$

Prove que f é da forma ax, o que em particular implica que f é contínua. (Sugestão: Como no exercício precedente, calcule $f(r)$ para r racional. Depois use o fato que dado um número real, pode-se determinar sucessões (r_n) e (s_n) de racionais convergindo para x, tais que (r_n) é crescente e (s_n) é decrescente.)

Exercício 3. Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo I que pode ser infinito. A função f é chamada *convexa* se

$$f(\lambda a + (1 - \lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda) f(b)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$ e todo par a, b em I. Mostre que f ser convexa significa que o segmento de reta ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ está acima do gráfico da função $y = f(x)$. Verifique que as funções $y = x$, $y = x^2$ são convexas. Dê outros exemplos.

Exercício 4. Demonstre que tôda função convexa $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ definida em um intervalo *aberto* (a, b) é contínua. (Sugestão: Fixe um ponto $c \in (a, b)$ e prove que $\lim_{x \to c+} f(x) = f(c)$. Para isso fixe pontos α e β em (a, b), tais que $\alpha < c < x < \beta$. Usando convexidade da função f aplicada aos pontos α, c, x, obtenha uma estimativa para $f(c) - f(x)$. Anàlogamente, considerando os pontos c, x, β, obtenha estimativa para $f(x) - f(c)$. As desigualdades obtidas implicarão a existência do limite lateral à direita em c, bem como sua igualdade a $f(c)$. Raciocínio semelhante para o limite lateral à esquerda em c.

Exercício 5. Dê um exemplo para mostrar que uma função convexa em um intervalo não é necessàriamente contínua.

Exercício 6. Seja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ uma função convexa. Demonstre que

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

para x, c, d no intervalo (a, b) e tais que $x < c < d$.

3

FUNÇÕES DERIVÁVEIS

3.1. A DERIVADA

Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo I, que pode ser de qualquer um dos tipos apresentados na seção 1.5. Usamos a notação $\{c\}$ para designar o conjunto formado de um único elemento c.

Fixemos um ponto c, o qual pode ser do interior de I ou a extremidade esquerda de I no caso desta pertencer ao intervalo I. Consideramos a função $q : I \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ definida por

$$(1) \qquad q(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Se a função q tem limite à direita no ponto c, então, diz-se que a função f é *derivável à direita* no ponto c. O limite à direita de q no ponto c, que se designa por $f'_+(c)$ é chamado a *derivada lateral direita* de f no ponto c. Em símbolos, tem-se

$$(2) \qquad f'_+(c) = \lim_{x \to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Seja agora c um ponto do interior de I ou a extremidade direita de I no caso desta pertencer a I. Se a função q definida em (1) tem limite à esquerda em c, então, diz-se que a função f é *derivável à esquerda* no ponto c. O limite à esquerda de q no ponto c, que se designa por $f'_-(c)$ é chamado a *derivada lateral esquerda* de f no ponto c. Em símbolos:

$$(3) \qquad f'_-(c) = \lim_{x \to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Seja agora c um ponto do interior de I. Se a função f é derivável à direita e à esquerda em c, e as derivadas laterais em c são iguais, dizemos que f é *derivável* em c. O valor comum das derivadas laterais em c é chamado a *derivada* de f em c, e se designa por $f'(c)$. É claro que f é derivável em c se a função q definida em (1) tem limite no ponto c, e tem-se

(4) $$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

A expressão (1) é chamada a *razão incremental* de f relativamente ao ponto $c \in$ I.

Interpretação cinemática. Consideremos uma partícula se deslocando de um ponto A para um ponto B sôbre uma reta R. Definamos a função $f : [0, T] \to \mathbf{R}$ que, para cada instante $t \in [0, T]$, dá a posição da partícula sôbre a reta R. Fixado $c \in [0, T]$, a ra-

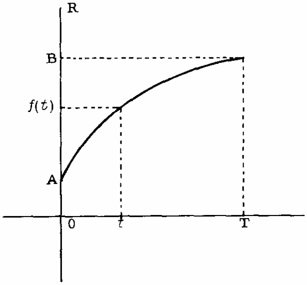


Fig. 20

zão incremental $\frac{f(t) - f(c)}{t - c}$ representa a velocidade média da partícula no trecho entre $f(t)$ e $f(c)$. O limite dêsse quociente no ponto c representa a velocidade da partícula no instante $t = c$.

Interpretação geométrica. Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo I. O gráfico de f, isto é, o conjunto dos pontos de plano da forma $(x, f(x))$, onde $x \in$ I, é também chamado uma curva. A razão incremental representa o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(c, f(c))$. Se o

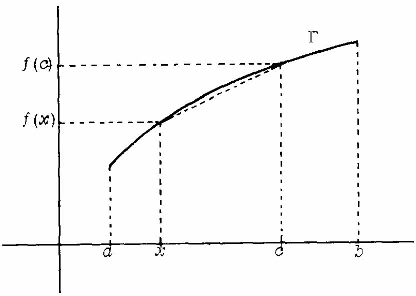


Fig. 21

limite da função $q(x)$, definida em (1), existe no ponto c, segue-se que quando tomamos uma sucessão $\{x_n\}$ tendendo a c, então $q(x_n)$ converge para $f'(c)$. Isto é, as retas com coeficiente angular $q(x_n)$ e passando pelo ponto $(c, f(c))$ se aproximam da reta com coeficiente angular $f'(c)$ passando pelo ponto $(c, f(c))$. Tal reta é chamada a tangente à curva Γ no ponto $(c, f(c))$.

Exemplos. A função $f(x) = |x|$ tem as derivadas laterais no ponto $x = 0$, as quais são $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$. Como essas derivadas laterais são diferentes, f não é derivável em $x = 0$. A função $f(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$ não é derivável à direita em $x = 0$, como se pode ver fàcilmente, pois $q(x) = \sqrt{x}/x = 1/\sqrt{x} \to +\infty$ quando $x \to 0+$.

Continuidade e existência da derivada. Como vimos no primeiro exemplo acima, a continuidade da função em um ponto não implica a existência da derivada. O segundo exemplo mostra que uma função pode ser contínua sem que isto sequer implique na existência de derivada lateral. Mostraremos abaixo (teorema 3.1) que a implicação contrária é verdadeira, isto é, a existência de derivada implica em continuidade.

Teorema 3.1. *Seja* $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ *uma função definida em um intervalo* I.

a) *Se f é derivável à direita em um ponto $c \in \mathrm{I}$, então f é contínua à direita em c.*

b) *Se f é derivável à esquerda em um ponto $c \in \mathrm{I}$, então f é contínua à esquerda em c.*

c) *Se f é derivável em $c \in \mathrm{I}$, então, f é contínua em c.*

Demonstração. a) Suponhamos, por contradição, que f não seja contínua à direita em c. Logo, ou $f(c+)$ não existe ou se existe $f(c) \neq f(c+)$. Em qualquer caso, segue-se que existe uma sucessão (x_n) decrescente convergindo para c e tal que $f(x_n)$ não converge para $f(c)$. Então, existe $d > 0$ e uma subsucessão (x_{n_j}) de (x_n) tal que $|f(x_{n_j}) - f(c)| > d$. Daí decorre que

$$|q(x_{n_j})| = \left| \frac{f(x_{n_j}) - f(c)}{x_{n_j} - c} \right| > \frac{d}{|x_{n_j} - c|} .$$

Portanto, temos $x_{n_j} \to c$ e $|q(x_{n_j})| \to +\infty$, o que contradiz a hipótese de que $q(x_{n_j})$ converge para $f'(c)$. As demonstrações de b) e c) se fazem de modo perfeitamente análogo.

O caráter local da derivada. A razão incremental $q(x)$ para pontos x perto de c envolve valôres de $f(x)$ também para x perto de c. Agora, como observamos na seção 2.2, a existência de limite da função $q(x)$ no ponto c é uma propriedade local, isto é, depende tão sòmente do comportamento de $q(x)$ perto de c. Portanto, a existência de derivada de f no ponto c é também uma propriedade local.

Definição. Seja $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ uma função real derivável em todos os pontos do interior de I. Usemos a notação int I para designar o interior de I. A função

$$f' : \mathrm{int\,I} \to \mathrm{R}$$

definida por

$$x \to f'(x)$$

é chamada a *função derivada* ou, simplesmente, derivada. Usa-se, também, a notação $\frac{df}{dx}$ (ou df/dx) para a derivada de f. Chamamos a atenção para o fato de que df/dx não é um quociente, mas, simplesmente, um símbolo para representar uma função.

Exercício 1. Demonstre o teorema 3.1 usando ϵ's e δ's.

Exercício 2. (Funções Lipschtzianas). Uma função real $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ é chamada *lipschitziana* se existe uma constante $\mathrm{K} > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{K}|x - y|$$

para todo x e y em I. Prove que uma tal f é contínua. Dê exemplos de funções lipschitzianas.

Exercício 3. (Funções localmente lipschitzianas). Uma função $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ definida em um intervalo aberto I é localmente lipschitziana se para cada ponto $x \in \mathrm{I}$ existe um subintervalo J de I centrado em x, onde f é lipschitziana. É claro que a constante K pode depender do intervalo J e, portanto, ser função do ponto x. Prove que tôda função localmente lipschitziana é contínua. Dê exemplos de funções localmente lipschitzianas que não são lipschitzianas.

Exercício 4. Seja f uma função derivável em um intervalo aberto I. Prove que f é localmente lipzchitziana.

3.2. OPERAÇÕES COM FUNÇÕES DERIVÁVEIS

Nos enunciados abaixo $f : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ e $g : \mathrm{I} \to \mathrm{R}$ são funções definidas em um intervalo I, e c será sempre um ponto do interior de I.

Teorema 3.2. *Se f e g são deriváveis em c, então $f + g$ também o é. E vale a fórmula*

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c).$$

Demonstração. Escrevemos a razão incremental de $f + g$:

$$\text{(1)} \qquad \frac{(f + g)(x) - (f + g)(c)}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}.$$

Usando o teorema 2.2 sôbre limites de funções, e a hipótese de que as duas razões incrementais no segundo membro de (1) têm limite no ponto c, segue-se que o primeiro membro também tem limite aí, o qual é igual a $(f + g)'(c)$.

Teorema 3.3. *Se f e g são deriváveis em c, então fg também o é. E vale a fórmula:*

$$\text{(2)} \qquad (fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Demonstração. Temos a seguinte identidade para a razão incremental de fg:

$$\text{(2')} \qquad \frac{(fg)(x) - (fg)c}{x - c} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}g(x) + \frac{g(x) - g(c)}{x - c}f(c).$$

Como, por hipótese, f e g são deriváveis em c, temos que as razões incrementais de f e g têm limite em c, e pelo teorema 3.1 segue-se que g é contínua em c. Logo, usando propriedades de limites de funções, segue-se que o primeiro membro de (2') tem limite em c. Passando ao limite em (2') obtemos a expressão (2).

Teorema 3.4. *Se f é derivável em c e $f(c) \neq 0$, então $1/f$ é derivável em c e*

$$\text{(3)} \qquad (1/f)'(c) = -f'(c)/[f(c)]^2.$$

Demonstração. Consideremos a identidade:

$$\text{(4)} \qquad \frac{(1/f(x) - (1/f(c))}{x - c} = -\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\,\frac{1}{f(x)f(c)}.$$

Vemos que (4) não é válida para todo x em $I\setminus\{c\}$, pois, $f(x)$ pode-se anular em alguns pontos. Mas pelo lema 3.1, abaixo, $f(x) \neq 0$ em um intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Logo, a identidade (4) é válida para todo x nesse intervalo. Por propriedades dos limites de funções e pela hipótese sôbre f, segue-se que o limite do segundo membro de (4) existe, e é igual a $-f'(c)/[f(c)]^2$. Logo, $1/f$ é derivável em c e vale a fórmula (3).

Lema 3.1. *Seja $f : I \to R$ uma função contínua em um intervalo I tal que $f(c) \neq 0$ para um ponto $c \in I$. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ tal que $|x - c| \leq \varepsilon$.*

Demonstração. Se $f(c) < 0$, use o lema 2.2. Se $f(c) > 0$, use o lema 2.3.

Corolário 3.1. *Se f e g são deriváveis em c e $g(c) \neq 0$, então f/g é derivável em c e*

$$(f/g)'(c) = [f'(c)g(c) - f(c)g'(c)]/[g(c)]^2.$$

Observação. Teoremas análogos aos teoremas 3.2, 3.3 e 3.4 valem para as derivadas laterais.

3.3. DERIVADAS DE ALGUMAS FUNÇÕES

a) *A função constante:* $f(x) = a$ para todo x. A razão incremental $q(x)$ é 0 para qualquer c e qualquer $x \neq c$. Logo, $f'(c) = 0$.

b) *A potência x^n, n-inteiro positivo.* Temos a seguinte identidade

$$\frac{x^n - c^n}{x - c} = x^{n-1} + cx^{n-2} + c^2x^{n-3} + \ldots + c^{n-2}x + c^{n-1}, \ x \neq c.$$

Usando propriedades de limites de funções, concluímos que a razão incremental tem limite no ponto c, e a derivada de x^n no ponto c é nc^{n-1}. Como isso é verdade para qualquer ponto c, temos

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad x \in \mathbf{R}$$

c) *Produto por constante.* Seja a uma (função) constante e $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função derivável em c. Então, decorre de a) acima e do teorema 3.3 que

$$(af)'(c) = af'(c)$$

d) *Polinômios.* Decorre do teorema 3.2 e dos resultados a) e b), acima, que

$$\frac{d}{dx}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$$

$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$$

e) A *potencia x^{-n}, n inteiro positivo.* Usando o teorema 3.4 temos

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{n-1}/(x^n)^2$$

ou

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}, \text{ para } x \neq 0$$

3.4. A DERIVADA DA FUNÇÃO INVERSA

Vimos na seção 2.8 que tôda função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ contínua e injetiva (ou o que dá no mesmo, de acôrdo com o teorema 2.16: crescente ou decrescente) tem uma inversa $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathbf{R}$. Naquela mesma seção provamos que, se I é um intervalo, então, $f(\mathrm{I})$ também o é, e que, se f é contínua, então, f^{-1} também é. Na presente seção admitiremos que f é derivável e estudaremos a derivabilidade de f^{-1}.

Teorema 3.5. *Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função crescente (ou decrescente) em um intervalo aberto* I. *Suponhamos que f seja derivável em* I, *e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathrm{I}$. Então, a função inversa $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathbf{R}$ é também derivável no intervalo (aberto) $f(\mathrm{I})$, e*

$$(1) \qquad (f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$$

para todo y em $f(\mathrm{I})$.

Demonstração. Que $f(\mathrm{I})$ é um intervalo aberto, decorre do lema 2.4. Seja $d = f(c)$ em $f(\mathrm{I})$, para qualquer $y = f(x)$ em $f(\mathrm{I})$, com $y \neq d$, temos a seguinte identidade 71

$$(2) \qquad \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \frac{x - c}{f(x) - f(c)}.$$

O segundo membro de (2) é precisamente $1/q(x)$, onde $q(x)$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto c. Como f é derivável, e sua derivada nunca se anula, segue-se que a razão incremental de f^{-1}, escrita no primeiro membro de (2), tem limite no ponto d. Portanto, pelo teorema 2.3

$$\lim_{y \to d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = 1/\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

o que prova o teorema.

Observação. A condição "$f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathrm{I}$" é essencial para a validade do teorema 3.5. De fato, seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbf{R}$. A função f é crescente e derivável em $\mathbf{R}$. Mas $f'(x) = 3x^2$ que é zero para $x = 0$. A função inversa f^{-1} é definida por $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, a qual não é derivável para $y = 0$. Trace os gráficos de f e f^{-1} e se convença dêsse fato.

Aplicação. Seja n um inteiro positivo e seja $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ a função real definida por $g(y)=\sqrt[n]{y}$ para todo $y\in(0,+\infty)$. É fácil de ver que g é a inversa da função $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definida por $f(x)=$ $=x^n$. Como f é crescente e $f'(x)=nx^{n-1}\neq 0$ para todo $x\in(0,+\infty)$, segue-se pelo teorema 3.5 que g é derivável e

$$g'(y) = 1/f'(g(y)) = 1/n(\sqrt[n]{y})^{n-1}$$

isto é,

$$g'(y) = \frac{1}{n}y^{-(n-1)/n}$$

Temos, então, a seguinte expressão para a derivada de $\sqrt[n]{y}=y^{1/n}$

$$\frac{d}{dy}(y^{1/n}) = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

3.5. DERIVAÇÃO DE FUNÇÕES COMPOSTAS

Teorema 3.6. (A regra da cadeia). *Sejam* $f:\mathrm{I}\to\mathbf{R}$ *e* $\varphi:\mathrm{J}\to\mathbf{R}$ *duas funções reais definidas em intervalos* I *e* J, *respectivamente, tais que* $f(\mathrm{I})\subset\mathrm{J}$ *e* $f(c)$ *é um ponto interior de* J. *Suponhamos que* f *seja derivável em* c *e* φ *derivável em* $f(c)$. *Então, a funcão composta* $\varphi\circ f:\mathrm{I}\to\mathbf{R}$ *é derivável em* c *e vale a fórmula:*

$$(1)\qquad (\varphi\circ f)'(c) = \varphi'(f(c))\cdot f'(c).$$

Demonstração em um caso particular. Consideremos o caso particular em que a função f tem a seguinte propriedade:

(*) Existe $\varepsilon>0$ tal que $f(x)\neq f(c)$ para todo x no conjunto

$$\mathrm{A} = \{x\in\mathrm{I}: 0<|x-c|<\varepsilon\}.$$

Para $x\in\mathrm{A}$ temos a seguinte identidade:

$$(2)\qquad \frac{(\varphi\circ f)(x)-(\varphi\circ f)(c)}{x-c} = \frac{\varphi(f(x))-\varphi(f(c))}{f(x)-f(c)}\cdot\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Agora o limite da primeira razão incremental do 2° membro de (2) pode ser determinado do seguinte modo: seja $(x_n)\subset\mathrm{A}$ e tal que $x_n\to c$; pela continuidade de f temos $f(x_n)\to f(c)$. E, então, pela derivabilidade de φ temos que

$$\frac{\varphi(f(x_n))-\varphi(f(c))}{f(x_n)-f(c)} \to \varphi'(f(c))$$

Como isso vale para tôdas as sucessões (x_n) nessas condições, temos que

$$(3) \qquad \lim_{x \to c} \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{f(x) - f(c)} = \varphi'(f(c))$$

Na identidade (2), usando propriedades dos limites de funções, a relação (3) e a derivabilidade de f, obtemos a relação (1).

Observação. A demonstração anterior realmente requer a restrição feita na função f, pois, de outro modo não poderíamos escrever a identidade (2). A propriedade (*) não se verifica, por exemplo, para uma função constante perto de c, i.e., se $f(x) =$ = const. para todo x em um intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Nesse caso, entretanto, a conclusão do teorema seria trivial, pois, $(\varphi \circ f)(x)$ seria também constante em $(c - \delta, c + \delta)$ e, portanto, a fórmula (1) se verificaria trivialmente, pois ambos os membros se anulariam. Acontece, porém, que a propriedade (*) também não se verifica para certas funções que não são constantes perto de c. Exemplo, a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

A função f se anula para $x = \frac{1}{n\pi}$ com $n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$ Por outro lado, ela é derivável na origem, pois o limite de

$$q(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

em $x = 0$ existe e é igual a 0. (Cf. seção 4.3, $|\operatorname{sen} \frac{1}{x}| \leq 1$). Portanto, para completa generalidade, devemos produzir uma demonstração do teorema 3.6 que seja válida mesmo para funções que não satisfaçam a propriedade (*). Provaremos antes o seguinte resultado.

Lema 3.2. *Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo* I, *e seja c um ponto do interior de* I. *Então, f é derivável em c se, e sòmente se, existe um número real r e uma função contínua $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ tal que*

$$(4) \qquad f(x) = f(c) + r(x - c) + \alpha(x) \cdot (x - c), \quad x \in \mathrm{I}$$

e

$$(5) \qquad \lim_{x \to c} \alpha(x) = 0.$$

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que f seja derivável em c. Definamos $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ como

(6) $$\begin{cases} \alpha(x) = q(x) - f'(c), & \text{para } x \neq c \\ \alpha(c) = 0 \end{cases}$$

De (6) segue-se que

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \alpha(x)(x - c).$$

Da derivabilidade de f e de (6) temos que $\lim\limits_{x \to c} \alpha(x) = 0$. Logo, (4) e (5) se verificam com $r = f'(c)$.

Recìprocamente, a relação (4) implica

(7) $$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = r + \alpha(x) \quad \text{para } x \neq c.$$

De (7) e (5) segue-se que a razão incremental de f no ponto $x = c$ tem limite, que é r. Logo, f é derivável em $x = c$ e $f'(c) = r$.

Demonstração do teorema 3.6 no caso geral. Aplicando o lema 3.2 à função $\varphi : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ e ao ponto $f(c)$ (que está no interior de J):

(8) $$\varphi(y) = \varphi(f(c)) + \varphi'(f(c)) \cdot (y - f(c)) + \alpha(y)(y - f(c))$$

onde

$$\lim_{y \to f(c)} \alpha(y) = 0.$$

Agora, pelo teorema 2.6 temos

(9) $$\lim_{x \to c} \alpha(f(x)) = \alpha(f(c)) = 0.$$

Usando (8) com $f(x)$ em vez de y temos

$$\frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{x - c} = \varphi'(f(c)) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \\ + \alpha(f(x)) \frac{f(x) - f(c)}{x - c};$$

que, por propriedades de limites de funções, dá

(10) $$\lim_{x \to c} \frac{\varphi(f(x)) - \varphi(f(c))}{x - c} = \varphi'(f(c)) f'(c) + \\ + \lim_{x \to c} \alpha(f(x)) \cdot f'(c).$$

Finalmente, o último têrmo do segundo membro de (10) desaparece em virtude de (9). Assim, o teorema 3.6 fica provado no caso geral.

Aplicação. Seja $g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ a função definida por $g(x) = x^{m/n}$, para todo $x \in (0, +\infty)$, onde m e n são inteiros positivos, g é a composta de duas funções

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \to x^{1/n} \qquad\qquad y \to y^{m}$$

As derivadas dessas funções são (cf. seção 3.4 e seção 3.3, respectivamente):

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{e} \quad \varphi'(y) = m y^{m-1} .$$

Logo, pelo teorema 3.6 temos

$$g'(x) = m(x^{1/n})^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} .$$

3.6. O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função monótona (cf. seção 2.7) definida em um intervalo I. Suponhamos que f seja derivável em todos os pontos do interior de I. Seja c um ponto do interior de I. É imediato que a razão incremental $q(x) = [f(x) - f(c)]/(x - c)$ tem os seguintes sinais: $q(x) > 0$ se f é crescente, $q(x) < 0$ se f é decrescente, $q(x) \geq 0$ se f é não decrescente, e $q(x) \leq 0$ se f é não crescente. Logo, a derivada de f no ponto c é

$$f'(c) \geq 0 \quad \text{se} \quad f \text{ é não decrescente}$$
$$f'(c) \geq 0 \quad \text{se} \quad f \text{ é não crescente.}$$

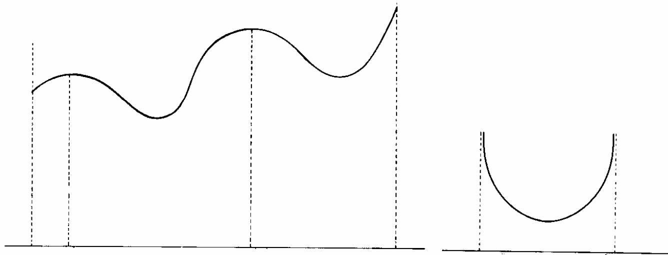
Observação. A função pode ser crescente e, apesar disso, a derivada pode ser zero. Exemplo: a função $f(x) = x^3$ é (estritamente) crescente e $f'(0) = 0$. Um ponto onde isso acontece é um *ponto de inflexão horizontal*. Existem outros tipos de pontos de inflexão que serão estudados na seção 3.8.

Uma função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ é dita ter um *máximo local* em um ponto c se existir um $\varepsilon > 0$ tal que

$$(1) \qquad f(c) \geq f(x)$$

para todo $x \in \mathrm{I}$ tal que $|x - c| < \varepsilon$. Como se vê nas figuras abaixo, a função pode ter vários máximos locais ou não os ter. É claro que para funções contínuas em um intervalo fechado, um máximo local não é necessàriamente o máximo (global) como foi definido na seção 2.6.

Fig. 22



c_1 c_2 c_3
função com três máximos locais

função sem máximo local

De modo análogo, definimos *mínimo local.*

Teorema 3.7. *Seja* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *uma função definida num intervalo* I, *a qual é derivável no interior de* I. *Se existe um máximo local em um ponto* $c \in \operatorname{int} \mathrm{I}$, *então* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Da desigualdade (1) segue-se que a razão incremental $q(x)$ relativa ao ponto c é tal que

(2) $$q(x) \geq 0, \quad \text{para} \quad x \in (c - \varepsilon, c)$$

(3) $$q(x) \leq 0, \quad \text{para} \quad x \in (c, c + \varepsilon)$$

De (2) concluímos que $f'(c) \geq 0$ e de (3) que $f'(c) \leq 0$. Logo $f'(c) = 0$.

Observação 1. Um teorema análogo ao teorema 3.7 vale para o caso de mínimo local.

Observação 2. A hipótese da existência de um máximo local no teorema 3.7 não é conseqüência das demais hipóteses do referido teorema. De fato, exemplo: $f(0,1) \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x$.

Observação 3. Se uma função $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ definida em um intervalo fechado I tem um máximo local na extremidade de I não se segue que a derivada lateral correspondente seja zero nessa extremidade. Exemplo, a função $f(x) = x$ para $x \in [0, 1]$.

Teorema 3.8. (Rolle). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função contínua definida em um intervalo fechado* $[a, b]$. *Suponhamos que* f *seja derivável no intervalo aberto* (a, b), *e que* $f(a) = f(b) = 0$. *Então, existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Demonstração. Se $f(x)$ é constante, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$ e o teorema fica provado neste caso. Se $f(x)$ não é constante, então, existe $x' \in (a, b)$ tal que $f(x') \neq 0$. Suponhamos que $f(x') > 0$. A função f sendo contínua em $[a, b]$ tem um máximo (global) aí, cf. teorema 2.12. Seja c um ponto onde $f(c) = \max_{a \le x \le b} f(x)$. Como $f(c) > 0$, o ponto c não pode ser uma extremidade do intervalo. Logo, $c \in (a, b)$. Pelo teorema 3.7 segue-se que $f'(c) = 0$. Se a outra possibilidade $f(x') < 0$ ocorresse, consideraríamos a função $g = -f$ e pela parte já provada dêste teorema teríamos $g'(c) = 0$, ou $f'(c) = 0$.

Observação. É essencial, para a validade do teorema 3.8, que f seja derivável em todos os pontos de (a, b). Veja o exemplo (ii) da figura 23.

Fig. 23

O resultado seguinte é conhecido como o teorema do valor médio, e nos textos clássicos como o teorema dos acréscimos finitos.

Teorema 3.9. (Teorema do valor médio). *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Suponhamos que f seja derivável no intervalo aberto (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Com o objetivo de aplicar o teorema de Rolle vamos construir primeiramente uma função auxiliar: seja $g(x)$ a função linear cujo gráfico passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, isto é,

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Agora definimos

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

que é uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e tal que $F(b) = F(a) = 0$. Pelo teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que

$F'(c) = 0$. Mas, $F'(c) = f'(c) - g'(c)$. Logo, $f'(c) = g'(c)$ e temos o resultado.

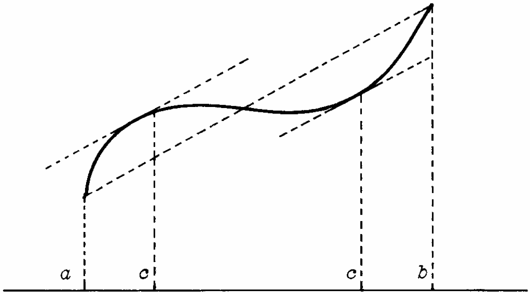


Fig. 24

Observação. O ponto c não é necessàriamente único. O significado geométrico de teorema do valor médio é aparente do exame da figura 24: existe um ponto $c \in (a, b)$, onde a tangente à curva é parelela à corda que passa pelas extremidades da curva.

Observamos na seção 3.3 que a derivada de uma função constante é 0. A recíproca dêste fato é provada a seguir.

Teorema 3.10. *Seja* $f : I \to \mathbf{R}$ *uma função contínua em um intervalo* I, *e tal que* $f'(x) = 0$. *Então,* f *é constante.*

Demonstração. É suficiente demonstrar que dados dois pontos quaisquer de I, os valôres de f coincidem nesses dois pontos. Sejam, portanto, z e x em I com $z < x$. Pelo teorema do valor médio, existe y em (z, x) tal que

$$f(x) - f(z) = f'(y)(x - z).$$

Como $f'(y) = 0$, o resultado se segue.

No início desta seção mostramos que se f é monótona e derivável em um certo intervalo, então, sua derivada tem sinal constante aí. Mostraremos agora a recíproca dêsse fato.

Teorema 3.11. *Seja* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ *uma função derivável. Então,*

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0 \quad \textit{para todo } x \Rightarrow f \textit{ não decrescente} \\
f'(x) &\leq 0 \quad \textit{para todo } x \Rightarrow f \textit{ não crescente} \\
f'(x) &> 0 \quad \textit{para todo } x \Rightarrow f \textit{ crescente} \\
f'(x) &< 0 \quad \textit{para todo } x \Rightarrow f \textit{ decrescente.}
\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam x_1 e x_2 em (a, b) e $x_1 < x_2$. Pelo teorema do valor médio

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(y)(x_2 - x_1),$$

onde $y \in (x_1, x_2)$. Como $x_2 - x_1 > 0$, as conclusões do teorema seguem-se trivialmente.

Exercício 1. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e que tem derivada contínua em $[a, b]$. Mostre que f é lipschitziana em $[a, b]$. (Observe que a continuidade da derivada pode ser substituída pela hipótese, mais fraca, de que tal derivada é limitada. A continuidade da derivada no intervalo fechado $[a, b]$ será discutida na seção 3.7 abaixo).

Exercício 2. Seja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ uma função derivável no intervalo (a, b). Mostre que f é convexa se, e só se, a derivada f' é não decrescente. (Sugestão. Para mostrar que f é convexa, considere a função $\varphi(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda f(x) - (1 - \lambda) f(y)$, onde $x < y$ são pontos *fixados* no intervalo (a, b) e a variável λ percorre o intervalo $[0, 1]$. Observe que $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, e para completar a demonstração da convexidade de f, analise a variação da derivada $\varphi'(\lambda)$. Para demonstrar a recíproca, fixe pontos c e d em (a, b) tais que $c < d$. Use as desigualdades obtidas aplicando o resultado do exercício 6, seção 2.10, às triplas $x < c < d$ e $c < d < y$.

Exercício 3. Seja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ uma função que possui derivada segunda no intervalo (a, b). Prove que f é convexa se, e só se, $f''(x) \geq 0$ para todo x em (a, b). (Sugestão: use o exercício 2 acima.)

Exercício 4. Uma função $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ é *côncava* se para qualquer par de pontos x e y fixado em (a, b) tem-se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Enuncie resultados análogos aos dos exercícios 2 e 3 acima para funções côncavas. (Sugestão: f é côncava se, e só se, $-f$ é convexa.)

3.7. A FÓRMULA DE TAYLOR

Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Na seção 3.1 foi definida a (função) derivada, $f' : (a, b) \to \mathbf{R}$, da função f. Essa derivada é também chamada *derivada primeira*, para distinguí-la das derivadas de ordem superior que definiremos a seguir. A derivada segunda de f é a derivada da derivada primeira, e se usa o símbolo f''; insistimos em que a derivada segunda é também uma função $f'' : (a, b) \to \mathbf{R}$. Assim por diante, definimos a derivada terceira f''', a derivada quarta $f^{(4)}, \ldots$, a derivada n-ésima $f^{(n)}$. Usamos a expressão "f é derivável até a ordem n" para dizer que existem as derivadas $f', f'', \ldots, f^{(n)}$, de f. As derivadas são também designadas por $df/dx, d^2f/dx^2, \ldots, d^nf/dx^n$.

Diremos que $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *é derivável no intervalo fechado* $[a, b]$ se ela fôr derivável em (a, b), no sentido definido na seção 3.1, e se as derivadas laterais $f'(a+)$ e $f'(b-)$ existirem. Provamos, anteriormente, que se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é derivável em $[a, b]$, então, f é contínua em $[a, b]$, cf. teorema 3.1.

Teorema 3.12. (Fórmula de Taylor). *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função definida em um intervalo* $[a, b]$. *Suponhamos que* f *seja derivável em* $[a, b]$ *até a ordem* n, *e que a derivada* $f^{(n+1)}$ *exista em* (a, b). *Seja* c *um ponto qualquer fixado em* $[a, b]$. *Então, para cada* $x \in [a, b]$, *existe um ponto* ξ *entre* x *e* c, *tal que*

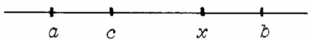
$$(1) \qquad f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n + R_{n+1},$$

onde

$$(2) \qquad R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - c)^{n+1}.$$

Observação. Para $n = 0$, o teorema acima é precisamente o teorema do valor médio. Note que das observações que precederam o enunciado do teorema 3.12, segue-se que as hipóteses de tal teorema implicam que $f, f', \ldots, f^{(n)}$ são funções contínuas em $[a, b]$.

Demonstração do teorema 3.12. Consideremos o caso $x > c$; por um raciocínio análogo atacaríamos o caso $x < c$. O



ponto x ficará fixado durante tôda a demonstração. Definamos a seguinte função $F : [c, x] \to \mathbf{R}$:

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \ldots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x - t)^n - $$

$$- \frac{1}{(n+1)!} K(x - t)^{n+1},$$

onde K é uma constante a ser escolhida posteriormente.

Pelas propriedades das operações com funções contínuas, cf. seção 2.5, segue-se que F é contínua em $[c, x]$. Por propriedades das funções deriváveis, segue-se que F é derivável em (c, x). (F não é necessàriamente derivável em $[c, x]$, pois, c ou x podiam coincidir com as extremidades a e b, onde $f^{(n)}$ pode não ser derivável.) Por outro lado, $F(x) = 0$ e se K fôr tomado convenientemente, i.e.,

$$(3) \quad K = \left\{ f(x) - f(c) - f'(c)(x - c) - \ldots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x - c)^n \right\} \frac{(n+1)!}{(x - c)^{n+1}},$$

então, $F(c) = 0$. Assim, tôdas as condições para a aplicação do teorema de Rolle estão satisfeitas. Por conseguinte, existe $\xi \in$ $\in (c, x)$ tal que $F'(\xi) = 0$. Calculando a derivada de F, muitas simplificações ocorrem e chegamos a

$$(4) \quad F'(t) = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n + \frac{1}{n!} K(x - t)^n .$$

Logo de (4) e de $F'(\xi) = 0$ segue-se

$$(5) \qquad K = f^{n+1}(\xi) .$$

Finalmente, (3) e (5) nos dão as expressões (1) e (2) que queríamos demonstrar.

Observação. Se escrevermos

$$P(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - c)^n,$$

o teorema 3.12 nos diz que $f(x)$ difere do polinômio $P(x)$ por R_{n+1}, isto é:

$$(6) \qquad f(x) - P(x) = R_{n+1} .$$

Uma relação como (6) é de grande importância nas questões de de aproximação da função f por polinômios. Exemplo: na seção 4 definiremos a função exponencial $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbf{R}$, a qual tem derivadas de tôdas as ordens e $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Logo, neste caso, se $c = 0$

$$P(x) = 1 + x + x^2/2! + \ldots + x^n/n!$$

e

$$R_{n+1} = e^{\xi} x^{n+1}/(n + 1)!$$

Logo, pelo teorema 3.12:

$$(7) \qquad e^x - P(x) = e^{\xi} x^{n+1}/(n + 1)!$$

Se $|x| < 1$, então temos de (7)

$$\left|e^x - P(x)\right| \leq e/(n+1)!$$

Essa desigualdade mostra que o polinômio $P(x)$ constitui uma aproximação para e^x com um êrro menor que $e/(n+1)!$ Quanto maior fôr n, melhor será essa aproximação, pois $e/(n+1)!$ tende a 0.

3.8. OS PONTOS CRÍTICOS DE UMA FUNÇÃO

Seja $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo aberto (a, b). Vimos na seção 3.6 que nos pontos c onde f tem um máximo local (ou um mínimo local), a derivada $f'(c)$ é 0. Portanto, o anulamento da derivada f' num ponto c é condição necessária para que c seja um máximo ou mínimo locais. Naquela mesma seção, mostramos que tal condição não era suficiente. Voltamos agora a essa questão a fim de fazer um estudo sistemático baseado na fórmula de Taylor.

Um ponto c onde $f'(c) = 0$ é chamado um *ponto crítico* de f. Estudaremos o que acontece com f nas vizinhanças de um ponto crítico. Já vimos (seção 3.6) que pontos de máximo local e mínimo local são pontos críticos.

Definição. Um ponto crítico c é dito um *ponto de inflexão horizontal* de f se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) < f(c)$, para $c - \varepsilon < x < c$, e $f(x) > f(c)$, para $c < x < c + \varepsilon$, ou $f(x) > f(c)$ para $c - \varepsilon < x < c$, e $f(x) < f(c)$, para $c < x < c + \varepsilon$.

Seja $c \in (a, b)$ um ponto onde f tem um máximo local, então, êsse máximo é dito *estrito* se $f(c) > f(x)$ para todo x em $|x - c| < \varepsilon$ para um certo ε. De modo análogo, define-se *mínimo local estrito*.

Teorema 3.13. *Seja $f:(a, b) \to \mathbf{R}$ uma função derivável no intervalo (a, b). Seja c um ponto crítico de f. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

(1) *$f'(x) \geq 0$ para $x \in (c - \varepsilon, c)$ e $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, c + \varepsilon)$, então f tem um máximo local em c. Se existe $\varepsilon > 0$ tal que*

(2) *$f'(x) \leq 0$ para $x \in (c - \varepsilon, c)$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \in (c, c + \varepsilon)$, então, f tem um mínimo local em c. Se as desigualdades em (1) e (2) são estritas (isto é, $<$ em vez de $\leq$, e $>$ em vez de $\geq$), então o máximo (ou mínimo) correspondente é estrito.*

A demonstração é conseqüência imediata do teorema 3.11.

Observação. A condição (1) do teorema acima seria satisfeita se f' fôsse não crescente em $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Anàlogamente, a condição (2) se verificaria se f' fôsse não decrescente. Portanto, se a derivada segunda de f existisse, a condição (1) seria satisfeita se

$$(3) \qquad f''(x) \leq 0 \text{ para todo } x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon).$$

Se a derivada segunda de f fôsse contínua, teríamos, em virtude do lema 2.2, que a condição (3) para algum $\varepsilon > 0$ seguir-se-ia de

$$(4) \qquad f''(c) < 0.$$

Resumindo: "*Se* $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ *tem derivada segunda,* f'' *contínua, então, um ponto crítico* c *(isto é,* $f'(c) = 0$*) é um ponto de máximo local se* $f''(c) < 0$."

Anàlogamente, provamos: "*Se* $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ *tem derivada segunda,* f'' *contínua, então, um ponto crítico* c *é um ponto de mínimo local se* $f''(c) > 0$".

Os dois critérios que acabamos de enunciar são de grande utilidade na pesquisa de máximo e mínimo locais. Êles, porém, oferecem apenas condições suficientes. De fato, a função pode ser tal que $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$ e c ser um ponto de máximo ou mínimo local. Exemplo: $f(x) = x^4$ para todo $x \in \mathbf{R}$. O ponto $x = 0$ é um ponto crítico, pois $f'(0) = 0$; apesar de $f''(0) = 0$, f tem um mínimo em $x = 0$. Sentimos, pois, que há necessidade de produzir um critério mais poderoso para decidir se um dado ponto crítico é de máximo ou mínimo. Isso é feito através do teorema abaixo.

Teorema 3.14. *Seja* $f:(a,b) \to \mathbf{R}$ *uma função derivável* n *vêzes e cujas derivadas,* $f', \dots, f^{(n)}$ *são contínuas em* (a,b). *Seja* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ *e* $f^{(n)}(c) \neq 0$. *Então, se* n *é par,*

$$f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow f \text{ tem máximo em } c$$

$$f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow f \text{ tem mínimo em } c.$$

Se n *é ímpar,* c *é um ponto de inflexão horizontal.*

Demonstração. Pelos lemas 2.2 e 2.3 existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^{(n)}(x) \neq 0$ para $|x - c| < \varepsilon$. Para tais x temos

$$f(x) = f(c) + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-c)^n,$$

onde $\xi \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ e, portanto, $f^{(n)}(\xi) \neq 0$.

1) Se n é par, $(x-c)^n > 0$ para qualquer $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Logo, o sinal de $f(x) - f(c)$ é o mesmo que o sinal de $f^{(n)}(\xi)$. Portanto, se

$f^{(n)}(c) < 0$, então, $f^{(n)}(\xi) < 0$ e $f(x) - f(c) < 0$, isto é, $f(c)$ é um máximo local.

Se $f^{(n)}(c) > 0$, então, $f^{(n)}(\xi) > 0$ e $f(x) - f(c) > 0$, isto é, $f(c)$ é um mínimo local.

2) Se n é ímpar, $(x - c)^n > 0$ se $x > c$ e $(x - c)^n < 0$ se $x < c$. Logo:

$$\text{se } f^{(n)}(c) > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) - f(c) < 0, \text{ se } x < c \\ f(x) - f(c) < 0, \text{ se } x > c \end{array}$$

$$\text{e se } f^{(n)}(c) < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) - f(c) > 0, \text{ se } x < c \\ f(x) - f(c) < 0, \text{ se } x > c, \end{array}$$

o que mostra que, quando n é ímpar, c é um ponto de inflexão horizontal.

Pergunta: Seja $f(x) = x^4 \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Mostre que 0 é um ponto crítico de f. Entretanto, f não tem nem máximo, nem mínimo, nem inflexão em $x = 0$. Por que isso não contradiz o teorema 3.14?

Até o momento tratámos apenas de pontos de inflexão horizontal, ou seja, do tipo de inflexão que ocorre nos pontos criticos. Agora damos a definição geral de inflexão.

Definição. Seja $f : I \to \mathbf{R}$ uma função definida e derivável em um intervalo aberto I. Um ponto $c \in I$ é chamado um *ponto de inflexão* se existe $\varepsilon > 0$ tal que uma das duas situações ocorre:

(i) $f(x) < r(x)$, $x \in (c - \varepsilon, c)$; $f(x) > r(x)$, $x \in (c, c + \varepsilon)$

(ii) $f(x) > r(x)$, $x \in (c - \varepsilon, c)$; $f(x) < r(x)$, $x \in (c, c + \varepsilon)$,

onde $y = r(x)$ é a equação da reta de inclinação $f'(c)$ e passando pelo ponto $(c, f(c))$.

Exercício 1. Dê exemplos de funções com pontos de inflexão dos tipos (i) e (ii) acima.

Exercício 2. Seja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ uma função com derivada segunda contínua no intervalo (a, b). Mostre $c \in (a, b)$ é um ponto de inflexão se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f''(x) > 0$ para $x \in (c - \varepsilon, c)$ e $f''(x) < 0$ para $x \in (c, c + \varepsilon)$, ou vice versa.

3.9. SÉRIES DE POTÊNCIAS

Formalmente, uma série de potências é uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1}$$

onde $a_n \in \mathbf{R}$, para todo n. Os números a_n são chamados os *coeficientes* da série. Para cada $x \in \mathbf{R}$ fixado a expressão (1) representa uma série numérica. Faz sentido, então, perguntar se, para aquêle x fixado, a série numérica correspondente converge ou não. Seja D o conjunto dos pontos $x \in \mathbf{R}$ para os quais a série (1) converge. É claro que D não é vazio, pois $x = 0$ pertence a D. Portanto, a expressão (1) define uma função $S(x)$ para todo $x \in D$, i.e.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Várias questões serão estudadas a seguir, como por exemplo: Dados os coeficientes a_n, qual é o conjunto D correspondente? Que tipo de função é $S(x)$?

Teorema 3.15. *Suponhamos que a série* (1) *converge em um ponto* $x = c \neq 0$. *Então, a série converge absolutamente para todo* x, *tal que* $|x| < |c|$.

Observação. Em particular, o teorema anterior implica que, se $c \neq 0$ pertence a D, então o intervalo aberto $(-|c|, |c|)$ está contido em D.

Demonstração do teorema 3.15. Como a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ converge, segue-se que a sucessão $(a_n c^n)$ tende a zero, cf. corolário 1.1. Logo, essa sucessão é limitada, e seja M tal que $|a_n c^n| \leq M$ para todo n. Fixemos agora um x tal que $|x| < |c|$. Temos então

$$|a_n x^n| = |a_n c^n| \left|\frac{x}{c}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{c}\right|^n.$$

Como $\left|\frac{x}{c}\right| < 1$, segue-se que a série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{c}\right|^n$ converge. E, finalmente, usando o teorema 1.9, concluímos que a série $\sum |a_n x^n|$ também converge, o que completa a demonstração.

Corolário 3.2. *Suponhamos que a série (1) não converge em um ponto $x = d \neq 0$. Então, ela não converge, também, para todo x tal que $|x| > |d|$.*

Demonstração. Imediata pelo método de redução ao absurdo.

Teorema 3.16. *Dada uma série de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, uma das duas possibilidades deve ocorrer:* (i) *a série converge para todo $x \in \mathbf{R}$;* (ii) *existe um número real r, tal que a série converge para todo $|x| < r$, e diverge para todo $|x| > r$.*

Observação. Se (i) ocorre dizemos que o raio de convergência da série é ∞. Se (ii) ocorre, o número r é definido como sendo o *raio de convergência*. Observe que o teorema nada diz sôbre o que ocorre quando $|x| = r$. Nêsses pontos, $x = -r$ e $x = r$, a série pode convergir ou não.

Demonstração. Como antes, seja D o conjunto dos pontos onde a série converge. D é não vazio, pois $0 \in D$. Suponhamos que (i) não ocorre, e provemos que (ii) deve ocorrer. Seja $d \notin D$. Então, em virtude do corolário acima, D está contido no intervalo $[-|d|, |d|]$. Seja r o supremo de D, e provemos que tal número r satisfaz às condições do enunciado do teorema. Suponhamos, por contradição, que existe x_0, $|x_0| < r$, onde a série não converge. Então pelo corolário acima, a série diverge para todo $|x| > |x_0|$, o que mostra que $D \subset [-|x_0|, |x_0|]$, contradizendo o fato que r é o sup de D. De modo análogo, provamos que não existe x_0, $|x_0| > r$, onde a série converge.

Observação. O teorema precedente mostra que D é um intervalo de uma das formas seguintes $(-r, r)$, $[-r, r]$, $(-r, r]$, $[-r, r,)$ $(-\infty, +\infty)$. O caso extremo $r = 0$, e, portanto, $D = \{0\}$ também pode ocorrer; exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

Que tipo de função é $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$? Mostraremos a seguir que se a série converge para $|x| < r$, então $S(x)$ é derivável nesse mesmo intervalo. Daí decorre que $S(x)$ é contínua em $|x| < r$.

Lema 3.3. *Suponhamos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convirja para $|x| < r$. Então as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ convergem absolutamente para todo $|x| < r$.*

86

Demonstração. Fixemos x, tal que $|x| < r$. Seja c tal que $|x| < c < r$. Como a série $\sum a_n c^n$ converge segue-se que a sucessão $(a_n c^n)$ tende a zero. Daí concluímos que existe M tal que $|a_n c^n| \leq M$ para todo n. Para provar a convergência da primeira série, façamos o seguinte:

$$|na_n x^{n-1}| = n|a_n c^{n-1}|\,|\tfrac{x}{c}|^{n-1} \leq (\tfrac{M}{c})n\,|\tfrac{x}{c}|^{n-1}.$$

Como $|x| < c$, temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} n|\frac{x}{c}|^{n-1}$ converge, cf. exercício 5, seção 1.12. Logo, pelo teorema 1.9 concluímos que $\sum |na_n x^{n-1}|$ também converge.

Para provar a convergência da segunda série procedemos de modo análogo:

$$|n(n-1)a_n x^{n-2}| = n(n-1)|a_n c^{n-2}|\,|\tfrac{x}{c}|^{n-2} \leq (\tfrac{M}{c^2})n(n-1)|\tfrac{x}{c}|^{n-2}$$

Como $|x| < c$, temos que a série $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|\frac{x}{c}|^{n-2}$ converge, cf. exercício 5, seção 1.12. Pelo teorema 1.9, concluímos que $\sum_{n=2}^{\infty} |n(n-1)a_n x^{n-2}|$ também converge.

Teorema 3.17. *Suponhamos que a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *convirja para* $|x| < r$. *Seja* $S(x)$ *a soma dessa série. Então,* $S(x)$ *é uma função derivável em* $|x| < r$ *e* $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$.

Demonstração. Devemos provar que a razão incremental de S em um ponto x, fixado, converge para a série $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$. Com isso em vista, escrevemos

$$(1) \qquad \frac{S(x+h)-S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right],$$

(fazendo a convenção que $na_n x^{n-1} = 0$ para $n = 0$).

Aplicando a fórmula de Taylor, cf. seção 3.7, a função x^n, temos

$$(2) \qquad (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}(x+\theta h)^{n-2}h^2,$$

onde θ é um número no intervalo $(0, 1)$. Como $|x + \theta h| \leq |x| + |h|$, obtemos de (1) e (2):

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2}(|x| + |h|)^{n-2}|h| =$$

$$= \frac{|h|}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)|a_n|(|x| + |h|)^{n-2}.$$

O último membro da desigualdade acima tende a zero quando $h \to 0$, pois a série que aí aparece converge quando $|x| + |h| < r$ em virtude do lema acima. Isso completa a demonstração.

Observação. O teorema acima mostra que a derivada de uma série de potências é também uma série de potências com o mesmo raio de convergência que a série inicial. Podemos portanto aplicar o mesmo teorema à série derivada. Concluímos então:

"Suponhamos que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convirja para todo $|x| < r$. Seja $S(x)$ a função definida como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $|x| < r$. Então $S(x)$ tem tôdas as derivadas (i.e., $S(x)$ é infinitamente derivável). Além disso, as derivadas são séries de potências obtidas por derivação têrmo a têrmo, e tôdas as séries derivadas têm o mesmo raio de convergência".

Exercício 1. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$; (iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$; (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$;

(v) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n$.

Exercício 2. Demonstre que se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l > 0$, então o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é $r = 1/l$.

Exercício 3. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é infinito. Seja c um número real fixado; então,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x + c)^n$ define uma função $f(x)$ para todo x real. Mostre que $f(x)$ é também uma série de potências, $\sum b_n x^n$, que converge para todo x real. Achea expressão dos coeficientes b_n em têrmos de a_n e c.

Exercício 4. Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ duas séries de potências, cujos raios de convergência são r_1 e r_2 respectivamente. Então, $\sum(a_n + b_n)x^n$ é uma série de potências cujo raio de convergência é $r \geq \min(r_1, r_2)$. Em particular, se as duas séries convergem para todo x, então a soma também converge para todo x.

Exercício 5. Dê um exemplo para mostrar que o raio de convergência da soma de duas séries pode ser realmente maior que o raio de convergência de cada série. (Sugestão: Considere $1 + x + x^2 + \ldots$ e $-x^{10} - x^{11} - x^{12} - \ldots$.)

3.10. A SÉRIE DE TAYLOR DE UMA FUNÇÃO

Seja $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ uma função infinitamente derivável em um intervalo aberto (a, b). Seja $x_0 \in (a, b)$. A série de Taylor da função f, relativamente a x_0, é definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Por uma mudança de variável, $z = x - x_0$, vemos que a série acima é uma série de potências. Logo aplicando a teoria desenvolvida na seção 3.9, concluímos que uma das duas possibilidades seguintes ocorre: a série de Taylor converge para todo x real,ou existe um real $r \geq 0$, tal que a série de Taylor converge para $|x - x_0| < r$ e diverge para $|x - x_0| > r$. Òbviamente a série de Taylor sempre converge para $x = x_0$.

Suponhamos que a série de Taylor de uma função f converge para $|x - x_0| < r$. Pela teoria desenvolvida na seção anterior, a soma da série de Taylor é uma função $S(x)$ infinitamente derivável em $|x - x_0| < r$. É natural e importante saber se $S(x) = f(x)$ em $|x - x_0| < r$. A resposta a essa pergunta é negativa, em geral. Entretanto, é positiva para um grande número das funções que aparecem nas aplicações.

Exemplo. Considere a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = e^{-1/x^2}$, para $x \neq 0$, (cf. seção 6.2). É fácil provar, usando resultados sôbre exponenciais, que $f(x)$ é infinitamente derivável e que $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$. Logo, a série de Taylor dessa função para $x_0 = 0$ é idênticamente 0, enquanto a função não é. (Trace um gráfico da função f.)

Consideremos a função $f(x)$ definida por uma dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que converge para $|x| < r$, onde $r > 0$. Qual é a série de Taylor de $f(x)$ relativamente a $x_0 = 0$? Usando o teorema 3.17 podemos calcular os coeficientes da série de Taylor e veremos, fàcilmente, que a série de Taylor de $f(x)$ é precisamente a série de potências que define $f(x)$.

Teorema 3.18. *Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função infinitamente derivável em um intervalo* I, *que contém a origem* 0 *em seu interior. Seja* $(-r, r)$ *o maior intervalo aberto dessa forma contido em* I, *e tal que, para cada c com $0 < c < r$, tem-se*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n!} \mathrm{M}_n(c) c^n\right] = 0,$$

onde $\mathrm{M}_n(c)$ é o máximo da função $f^{(n)}(x)$ no intervalo $[-c, c]$. Então, a série de Taylor da função $f(x)$, relativamente a 0, *converge para $f(x)$ no intervalo $(-r, r)$.*

Observação. Em virtude do teorema 3.1, as funções $f^{(n)}(x)$ são contínuas em I. Pelo teorema 2.12, segue-se que $f^{(n)}(x)$ tem máximo no intervalo fechado $[-c, c]$.

Demonstração. Fixemos um ponto $x \in (-r, r)$. Usando a fórmula de Taylor temos:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \mathrm{R}_{n+1},$$

com

$$\mathrm{R}_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1},$$

onde ξ é um ponto do intervalo $(0, x)$, se $x > 0$, ou de $(x, 0)$, se $x < 0$. Para demonstrar que a série de Taylor da função f, calculada no ponto x, converge para $f(x)$, basta provar que o resto R_{n+1} tende a zero quando n tende a infinito.

Seja $c = |x|$. Então,

$$|\mathrm{R}_{n+1}| \leq \frac{1}{(n+1)!} \mathrm{M}_{n+1}(c) c^{n+1}$$

e pela hipótese do teorema segue-se que $R_{n+1} \to 0$, o que completa a demonstração.

Exercício 1. Seja n um número inteiro positivo. Prove que

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j.$$

(Êste resultado é chamado o teorema do binômio de Newton.) Sugestão: Considere a função $f(x) = (1 + x)^n$ e obtenha sua série de Taylor relativa a 0. Qual é o raio de convergência dessa série de Taylor?

Exercício 2. Seja $f : (-\infty, 1) \to \mathbf{R}$ a função definida por $f(x) = 1/(1 - x)$. Obtenha a série de Taylor de f, relativa a 0, e mostre que ela converge para a função considerada no intervalo $(-1, 1)$.

Exercício 3. Considere a função $f(x) = (1 + x)^a$ onde a é um número real qualquer. Obtenha a série de Taylor de f, relativamente a 0. Considere os vários casos do parâmetro a. Determine o raio de convergência das séries correspondentes.

Exercício 4. Enuncie e demonstre um teorema análogo ao teorema 3.18 para o caso da série de Taylor relativa a um ponto $x_0 \neq 0$.

Exercício 5. Considere a função polinomial $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$. Obtenha a série de Taylor de f relativamente ao ponto $x_0 = 1$. Qual é o raio de convergência dessa série?

Exercício 6. Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ que que converge para todo $|x| < r$. Seja $f(x)$ a função definida pela série. Mostre que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. (Êste exercício justifica a observação feita antes do teorema 3.18.) Use êste resultado e mostre que se duas séries de potências definem a mesma função em um intervalo $(-r, r)$, então os coeficientes correspondentes das duas séries são iguais.

4

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo introduziremos as funções trigonométricas de modo rigoroso e elegante através das séries de potências. A apresentação tem um certo artificialismo em seu início (quando se definem as funções seno e cosseno), mas depois as propriedades das funções são deduzidas com lógica e concisão. Essa situação é bem característica das teorias matemáticas "acabadas". O leitor não deve, porém, pensar que o processo inventivo em matemática segue essa linha dedutiva, partindo de postulados e definições para teoremas e resultados relevantes. Antes de encontrar os postulados e as definições apropriadas, o matemático desenvolve intensa pesquisa na qual as "técnicas" são imaginação, intuição, experiência, sorte e muito trabalho! Recomendamos ao leitor, os artigos de Paul Halmos e Henri Poicaré sôbre inovação e criação em matemática, mencionados na referência (4).

Històricamente, as funções seno e cosseno foram introduzidas como se faz na trigonometria. O método trigonométrico tem mais apêlo geométrico e pode ser mais natural e inspirador para o principiante. Em vista disso, não cremos que o método por nós escolhido deva ser usado para alunos, que vão estudar as funções trigonométricas pela primeira vez. Entretanto, chamamos a atenção do leitor para o fato de que o estudo das funções seno e cosseno na trigonometria deixa muito a desejar, quanto a rigor.

Pode parecer ao leitor que as "nossas" funções seno e cosseno definidas abaixo não são as mesmas da trigonometria, apesar de terem em comum tôdas as propriedades usuais. Essa dúvida é bastante legítima, e, na verdade, devemos provar que estamos introduzindo as funções seno e cosseno usuais. Isso será provado do seguinte modo. Mostraremos que só existe *um* par de funções $s(x)$ e $c(x)$, definidas e deriváveis para todo x real, tais que

$$s'(x) = c(x) \qquad c'(x) = -s(x)$$

$$s(0) = 0 \qquad c(0) = 1.$$

As funções seno e cosseno da trigonometria gozam das propriedades acima. Por outro lado, as funções seno e cosseno aqui definidas também satisfazem essas propriedades. Logo, elas são as mesmas!

4.1. AS FUNÇÕES SENO E COSSENO

Consideremos as duas séries de potências seguintes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Aplicando o teste da razão, concluimos que elas convergem, qualquer que seja x real. Portanto, pelo teorema 3.17, essas séries representam funções deriváveis (e, na verdade, infinitamente deriváveis) definidas para todo x real. Definimos, então, as funções seno e cosseno, respectivamente, pelas expressões:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\text{(2)} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Usando o teorema 3.17, que justifica a derivação termo a termo de uma série de potências, temos:

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

Diretamente da definição decorre que seno é uma função ímpar, enquanto cosseno é uma função par, isto é,

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Teorema 4.1. *Para todo x real, tem-se*

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(Notação: $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$.)

Demonstração. A função $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ é derivável, e sua derivada é

$$f'(x) = 2 \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)' + 2 \cos x(\cos x)' = 0$$

em vista das relações (3). Logo, pelo teorema 3.10, segue-se que $f(x) = c$, onde c é uma constante. Para determinar c, basta calcular f para $x = 0$. Como

$$(6) \qquad \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{e} \quad \cos 0 = 1,$$

relações que decorrem imediatamente das definições (1) e (2), concluimos que $c = 1$. Isso prova a relação (5).

Corolário 4.1. Temos para todo x real:

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \cos x \leq 1.$$

Lema 4.1. *Seja $f(x)$ a função definida por uma série de potências, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, que converge em $|x| < r$. Suponhamos que*

$$(7) \qquad f''(x) + f(x) = 0, \quad \text{para} \quad |x| < r,$$

e

$$(8) \qquad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$$

Então, $f(x) = 0$ para todo $|x| < r$.

Demonstração. A equação (7) diz que $f''(x) = -f(x)$. E daí, o fato que $f(0) = 0$ implica

$$(9) \qquad f''(0) = 0.$$

95

O teorema 3.17 diz que f é infinitamente derivável, e portanto, derivando (7) obtemos

$$(10) \qquad f'''(x) + f'(x) = 0.$$

Como $f'(0) = 0$, segue-se que $f'''(0) = 0$. E assim por diante, obtemos que tôdas as derivadas de f para $x = 0$ são zero. Por conseguinte, todos os coeficientes da série de potências que define f se anulam, pois $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ Logo, $f(x) \equiv 0$.

Teorema 4.2. Para quaisquer números reais a e b valem as seguintes fórmulas:

$$(11) \qquad \operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

$$(12) \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Demonstração. Fixe a e defina a função

$$f(x) = \operatorname{sen}(a + x) - \operatorname{sen} a \cos x - \operatorname{sen} x \cos a.$$

A função $\operatorname{sen}(a + x)$ é uma série de potências em x, que converge para todo x real (cf. exercício 3, seção 3.10). Logo $f(x)$

é uma série de potências em x. Por outro lado é fácil ver, usando (6), que $f(0) = f'(0) = 0$. Logo, pelo lema 4.1 temos $f(x) \equiv 0$, o que prova a relação procurada. De modo semelhante, prova-se a relação (12).

Teorema 4.3. *Existe* $a > 0$ *tal que* $\cos a = 0$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que não exista um tal número real a. Como $\cos 0 = 1$, segue-se do teorema do valor intermediário (lembre que $\cos x$ é uma função contínua) que $\cos x > 0$ para todo $x > 0$. Logo, a função $\operatorname{sen} x$ seria crescente na semi-reta $[0, \infty)$, em virtude do teorema 3.11 e da relação (3) acima. Como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, segue-se, então, que $\cos x$ seria decrescente em $[0, \infty)$. Logo, *existiria* α no intervalo $[0, 1)$, tal que

$$(!) \qquad \lim_{x \to \infty} \cos x = \alpha.$$

Por outro lado, desde que $\operatorname{sen} 0 = 0$, segue-se que existiria β no intervalo $(0, 1]$ tal que

$$(!!) \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x = \beta$$

Das relações (11) e (12) obtemos

$$(13) \qquad \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$(14) \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Usando (5) na relação (14) temos

$$(15) \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Passando ao limite, quando $x \to +\infty$, nas relações (13) e (15), e usando (!) e (!!), temos,

$$(16) \qquad \beta = 2\alpha\beta \qquad \alpha = 2\alpha^2 - 1.$$

As únicas soluções, α e β, das equações (16) são $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, o que contradiz os fatos de $\alpha \in [0, 1)$ e $\beta \in (0, 1]$. A contradição proveio de admitirmos que não existisse um $a > 0$ tal que $\cos a = 0$. Logo, o teorema está demonstrado.

Definição do número π. Como $\cos 0 = 1$ e $\cos x$ é uma função contínua, segue-se, usando o teorema 4.3, que existe um primeiro $a > 0$, onde o cosseno se anula. Em outras palavras, existe $a > 0$ tal que $\cos x > 0$ para $0 \le x < a$ e $\cos a = 0$. *Definimos*, então,

$$\pi = 2a$$

Temos então as seguintes relações

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Uma função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é *periódica* de *período* T se $f(x+T) = f(x)$ para todo x real. Uma função pode ser periódica e não ser contínua. (Dê um exemplo.) Se T é um período para uma função f, então, -T, 2T e, em geral, kT para qualquer inteiro k é também um período. O menor período positivo é chamado o *período fundamental*. É praxe, porém, usar simplesmente a palavra *período* para designar o período fundamental.

Teorema 4.4. *As funções seno e cosseno são periódicas com período* 2π.

Demonstração. Primeiramente, usando (13), (14) e (17) temos

$$\operatorname{sen}\pi = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\cos\pi = \cos^2\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} = -1.$$

A seguir, usamos (13) e (14) novamente

$$\operatorname{sen}2\pi = 2\operatorname{sen}\pi\cos\pi = 0$$

$$\cos 2\pi = \cos^2\pi - \operatorname{sen}^2\pi = 1.$$

Finalmente, as relações (11) e (12) fornecem

$$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen}x\cos 2\pi + \operatorname{sen}2\pi\cos x = \operatorname{sen}x$$

e

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}2\pi = \cos x,$$

que provam a periodicidade das funções seno e cosseno.

Observação. Em virtude do teorema precedente, vemos que para traçar os gráficos do seno e do cosseno basta estudá-las, por exemplo, no intervalo $[-\pi, \pi]$. Como o seno é uma função ímpar, basta estudá-la no intervalo $[0, \pi]$. De fato, uma vez que se tenha o gráfico do seno em $[0, \pi]$, o gráfico no intervalo $[-\pi, 0]$ será obtido por simetria com relação à origem. Aplicando a relação (11), vemos, fàcilmente, que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x)$. Isso mostra que o gráfico de função seno é simétrico com relação à reta $x = \frac{\pi}{2}$. Logo, basta determinar o gráfico do seno no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Para o gráfico de função cosseno, fazemos a seguinte observação. Aplicando a relação (11) temos que $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$, o que mostra que o gráfico do cosseno é nada mais que uma translação (de $\pi/2$) do gráfico do seno na direção do eixo dos x.

Com tôdas as informações colhidas até êste ponto sôbre a função seno podemos, finalmente, traçar seu gráfico:

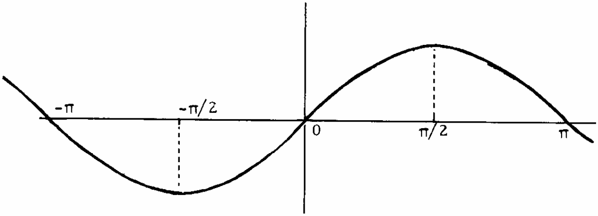


Fig. 25

Por que o gráfico do seno não é como o que esboçamos abaixo?

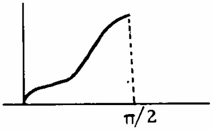


Fig. 26

A resposta é imediata. Como $\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$, temos que a derivada segunda do seno é negativa em $(0, \pi)$. Logo, cf. exercício 4, seção 3.7, a função seno é côncava no intervalo $(0, \pi)$.

Observe o leitor que em $x = 0$ a função seno tem um ponto de inflexão. Isso pode ser visto, também, observando que a derivada segunda do seno (que é $-\operatorname{sen} x$) muda de sinal quando passa por $x = 0$, cf. exercício 2, seção 3.8.

O gráfico do cosseno é obtido transladando de $\frac{\pi}{2}$ o gráfico do seno.

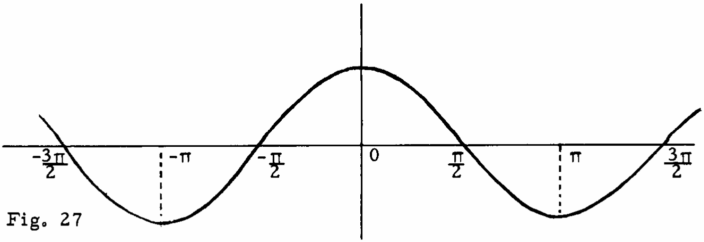


Fig. 27

Da unicidade das funções seno e cosseno. É interessante observar que as relações (3) e (6) determinam as funções seno e cosseno. Isto é, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.5. *Suponhamos que as funções* $s_1(x)$, $c_1(x)$, $s_2(x)$ *e* $c_2(x)$, *definidas para todo* x *real, satisfazem às seguintes relações:*

$$(18) \qquad s_1'(x) = c_1(x), \qquad c_1'(x) = -s_1(x)$$

$$(19) \qquad s_1(0) = 0, \qquad c_1(0) = 1$$

$$(20) \qquad s_2'(x) = c_2(x), \qquad c_2'(x) = -s_2(x)$$

$$(21) \qquad s_2(0) = 0, \qquad c_2(0) = 1.$$

Então, $s_1(x) = s_2(x)$ *e* $c_1(x) = c_2(x)$, *para todo* x *real.*

Demonstração. Considere as funções

$$f(x) = s_1(x)c_2(x) - s_2(x)c_1(x)$$

e

$$g(x) = s_1(x)s_2(x) + c_1(x)c_2(x).$$

Usando as relações (18) e (20), concluimos que

$$f'(x) = g'(x) = 0,$$

e das relações (19) e (21), segue-se que

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad g(0) = 1.$$

Logo, pelo teorema 3.10, segue-se que

$$f(x) = 0 \quad \text{e} \quad g(x) = 1,$$

isto é

$$(22) \qquad s_1(x)c_2(x) - s_2(x)c_1(x) = 0$$

$$(23) \qquad s_1(x)s_2(x) + c_1(x)c_2(x) = 1.$$

Multiplicando a equação (22) por $c_2(x)$, a equação (23) por $s_2(x)$ e somando obtemos:

$$s_1(x)c_2^2(x) + s_1(x)s_2^2(x) = s_2(x)$$

ou seja

$$(24) \qquad s_1(x)[c_2^2(x) + s_2^2(x)] = s_2(x).$$

Agora, observe que o teorema 4.1 decorre tão sòmente do fato que as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ satisfazem as relações (3) e (6), que são análogas de (18) e (19), ou (20) e (21). Logo

$$c_1^2(x) + s_1^2(x) = 1$$

e

$$c_2^2(x) + s_2^2(x) = 1.$$

Portanto de (24) concluímos que $s_1(x) = s_2(x)$.

De modo análogo, multiplicando (22) por $-s_2(x)$, (23) por $c_2(x)$ e somando obtemos

$$c_1(x)[s_2^2(x) + c_2^2(x)] = c_2(x),$$

o que implica $c_1(x) = c_2(x)$, e finaliza a demonstração do teorema.

Exercício 1. Demonstre que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

Observação. O exercício anterior mostra que as funções

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

são contínuas para todo x real.

Exercício 2. Trace os gráficos das funções f e g definidas na observação acima.

Exercício 3. Mostre que a função

$$h(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua, para todo x. Mostre, também, que h não é derivável em $x = 0$.

Exercício 4. Mostre que a função

$$k(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é derivável para todo x real.

Exercício 5. Demonstre que existe uma, e sòmente uma, função $f(x)$ representável por uma série de potências (i. e., $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para todo x real), tal que

$$f''(x) + f(x) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f'(0) = 1$$

A questão da unicidade já foi provada no lema 4.1.

(Compare êste exercício com o teorema 4.5. Observe que êste exercício demonstra a unicidade da função $s(x)$, do teorema 4.5, na classe das funções que são séries de potências. Em outras palavras, se quizermos provar que existe apenas uma função $s(x)$, representável por uma série de potências, que satisfaz às equações (18) e (19), podemos proceder como no exercício 5. Observe que, na demonstração do teorema 4.5, não fizemos a hipótese que $s(x)$ é representável por uma série de potências. Na verdade, o teorema 4.5 implica que uma função $s(x)$, satisfazendo às equações (18) e (19), é necessàriamente uma série de potências.)

4.2. AS OUTRAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A tangente. A tangente, que se designa por $\operatorname{tg} x$, é a função real definida por

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

É claro que o campo de definição de $\operatorname{tg} x$ é o conjunto dos reais menos os pontos onde o cosseno se anula i.e., $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$, ou seja, $x = (2k+1)\pi/2$ para $k = 0, \pm 1, \ldots$. A função tangente é contínua em todos os pontos de seu campo de definição, pois é o quociente de duas funções contínuas, e o denominador não se anula aí. É fácil de ver que o gráfico de $\operatorname{tg} x$ é como se indica na figura 28.

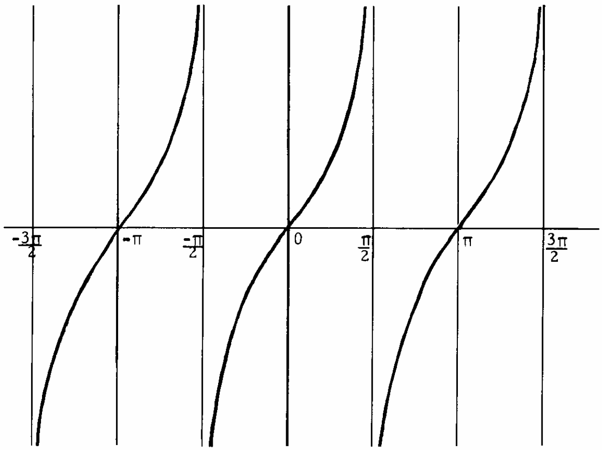


Fig. 28

Nos pontos $x = (2k+1)\pi/2$ a função tg x tem descontinuidade de segunda espécie; é fácil ver que o limite à direita nesses pontos é $-\infty$, e o limite à esquerda é $+\infty$. A função tg x é periódica de período π, pois, se $x \neq (2k+1)\pi/2$ temos

$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x.$$

Deixamos ao leitor traçar os gráficos das outras funções trigonométricas:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

As derivadas dessas novas funções trigonométricas podem ser obtidas usando os teoremas da seção 3.2. Asim

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x) = \frac{\cos x \cos x - \operatorname{sen} x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = \frac{\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) - \cos x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x \operatorname{cossec} x,$$

que são fórmulas válidas para os valôres de x que não anulam os denominadores.

4.3. AS FUNÇÕES INVERSAS

A função arc sen. A função sen x é crescente no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Logo, ela tem uma inversa aí. Essa inversa é chamada a função arco-seno, que se designa por arc sen e, portanto, é assim definida:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen} : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \\ y &\to \operatorname{arc\,sen} y, \end{aligned}$$

onde $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} y) = y$. É imediato, por se tratar de uma função inversa de uma função crescente, contínua e derivável, que arc sen é crescente e contínua em $[-1, 1]$ e derivável em $(-1, 1)$. Além disso,

$$\frac{d}{dy}(\text{arc sen } y) = \frac{1}{(\text{sen})'(\text{arc sen } y)} = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } y)}.$$

Pela relação (5) da seção 4.1 temos:

$$\cos^2(\text{arc sen } y) = 1 - \text{sen}^2(\text{arc sen } y) = 1 - y^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dy}(\text{arc sen } y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Observação. É claro que de modo análogo podemos definir as inversas da função seno quando restrita a outros intervalos da forma $[n\pi/2, (n+2)\pi/2]$, $n \in \mathbf{Z}$, onde ela é crescente. Dizemos que dêste modo temos outras determinações da função arco-seno. Cada determinação é, pois, uma função diferente.

Se concordarmos em por os gráficos de tôdas essas determinações em um mesmo sistema de coordenadas, temos algo como nos mostra a figura 17.

Insistimos em que se compreenda que a figura 29 não é o gráfico de uma função; de fato, para um dado $x \in [-1, 1]$ corresponde uma infinidade de pontos do gráfico; portanto, isso não poderia ser uma função!

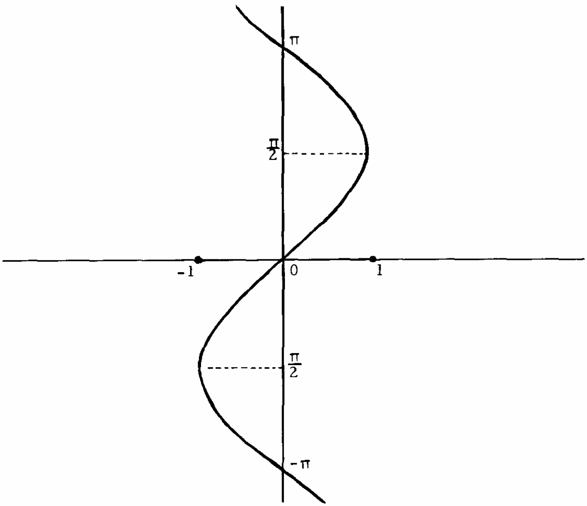


Fig. 29

A função arc cos. A função $\cos x$ é decrescente no intervalo $[0, \pi]$. Logo, ela tem uma inversa aí. Essa inversa é chamada a função arco-cosseno, que se designa por arc cos, e é assim definida

$$\begin{aligned} \text{arc cos} : [-1, 1] &\to [0, \pi] \\ y &\to \text{arc cos}\, y \end{aligned}$$

onde $\cos(\text{arc cos}\, y) = y$. A função arc cos é decrescente e contínua em $[-1, 1]$ e derivável em $(-1, 1)$. E a derivada é obtida assim

$$\frac{d}{dy}(\text{arc cos}\, y) = \frac{1}{\cos'(\text{arc cos}\, y)} = -\frac{1}{\text{sen}(\text{arc cos}\, y)}$$

Como

$$\text{sen}^2(\text{arc cos}\, y) = 1 - \cos^2(\text{arc cos}\, y) = 1 - y^2, \text{ temos}$$

$$\frac{d}{dy}(\text{arc cos}\, y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Como no caso do arc sen, podemos definir outras determinações.

A função arc tg. A função arco-tangente (em símbolos arc tg) é definida como a inversa da função $\text{tg}\, x$ restrita ao intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Logo

$$\begin{aligned} \text{arc tg} : (-\infty, \infty) &\to (-\pi/2, \pi/2) \\ y &\to \text{arc tg}\, y \end{aligned}$$

onde $\text{tg}(\text{arctg}\, y) = y$. Tal função é crescente, contínua e derivável. A derivada é

$$\frac{d}{dy}(\text{arctg}\, y) = \frac{1}{(\text{tg})'(\text{arctg}\, y)} = \frac{1}{\sec^2(\text{arctg}\, y)}$$

Como $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$ (prove!) obtemos, finalmente,

$$\frac{d}{dy}(\text{artg}\, y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Deixamos ao leitor o estudo das outras funções inversas

arc cot, arc sec e arc cossec.

5

A INTEGRAL

5.1. A NOÇÃO DE ÁREA

No curso secundário, o estudo das áreas das figuras planas é, geralmente, apresentado do seguinte modo. Em primeiro lugar, admite-se, sem uma declaração explícita, que tôda figura plana tem uma área. Além disso, admite-se que a área tem as seguintes propriedades:

(i) duas figuras planas congruentes têm a mesma área;

(ii) se uma figura plana F é "decomposta" em duas figuras planas F_1 e F_2, então, a área de F é igual à soma das áreas de F_1 e F_2.

Posto isso, define-se a área de um retângulo de base b e altura h como sendo o número bh. Em seguida prova-se, usando as propriedades acima, que a área de um paralelogramo de base b e altura h é também bh, cf. figura 30(a). É, então, fácil de demonstrar que a área de um triângulo de base b e altura h é $bh/2$, cf. figura 30(b). E, a partir dêsse resultado obtêm-se as áreas de figuras que podem ser decompostas em triângulos; dêste modo, temos as áreas de trapézios, e, em geral, de polígonos. Para o círculo de raio r, o problema é bem mais difícil.

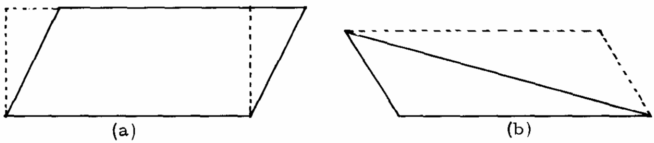


Fig. 30

O cálculo da área do círculo preocupou os matemáticos desde a antiguidade, quando então o problema era conhecido como a quadratura do círculo. Arquimedes provou que a área A do círculo de raio r é igual à área de um triângulo cuja base é o comprimento C da circunferência do círculo e cuja altura é r. Segue-se, então, que a razão entre a área A e a área do quadrado de lado r é igual à relação entre C e o diâmetro do círculo; de fato,

$$(1) \qquad \frac{A}{r^2} = \frac{\frac{1}{2}Cr}{r^2} = \frac{C}{2r}.$$

Usando o seguinte resultado, que já aparece nos Elementos de Euclides: "A razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre os quadrados de seus raios", Arquimedes concluiu que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro do círculo é constante. Essa constante é a que, hoje, chamamos de π. Portanto, de (1) tem-se as fórmulas para a área do círculo e o comprimento da circunferência: $A = \pi r^2$ e $C = 2\pi r$, respectivamente. Calculando os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito de 96 lados, e considerando que C está compreendido entre êsses dois valôres, Arquimedes obteve

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Tanto na demonstração do resultado de Euclides enunciado acima, como no cálculo aproximado de π feito por Arquimedes, usou-se a idéia de considerar o círculo como limite de polígonos regulares de lados cada vez menores. Isso constitui o que os gregos chamavam método de exaustão, porque a sucessão dos polígonos de certo modo exaure o círculo. Observe o leitor que no fundo uma nova propriedade da área é usada nesse raciocínio. Isto é, (iii) se F é uma figura plana e P_n é uma sucessão crescente (i.e., P_{n+1} contém P_n) de figuras planas que "tendem" para F, então as áreas de P_n convergem para a área de F. A essência do método da exaustão é o uso dessa propriedade. E é essa também a essência do cálculo integral formalizado no século XVIII por Newton e Leibniz. O método da exaustão foi ainda utilizado por Arquimedes e outros para o cálculo de outras áreas planas. O sucesso, porém, dependia em cada caso da obtenção de uma sucessão adequada de figuras planas, cujas áreas fôssem conhecidas e constituissem uma aproximação da área a calcular.

Esperamos que ao ler as observações precedentes, o leitor tenha sentido que uma boa porção de formalização seria necessària para tornar a apresentação rigorosa. Por exemplo, é imprescindível definir o que é uma "figura plana". É também necessário explicar o que significa "decompor" uma figura plana, o que significa uma sucessão de figuras planas "tender" para outra, etc. Tôda essa formalização poderia ser feita após uma definição cuidadosa de curva plana; não nos deteremos para fazê-lo a fim de não fugir ao objetivo dêste trabalho. Existe uma generalização da noção de área, a medida de Lebesgue, que serve para medir os conjuntos de uma coleção muito grande de subconjuntos do plano.

Usando essa idéia de aproximar figuras planas podemos estabelecer o seguinte programa para o cálculo da área A, indicada na figura 31(a), onde Γ é o gráfico de uma função contínua.

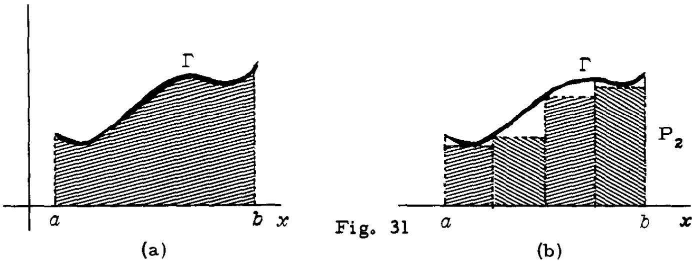


Fig. 31

Considere partições do intervalo $[a, b]$: $\delta_1, \delta_2, \ldots$. A primeira partição δ_1 é dada pelos pontos a, $(a + b)/2$ e b; dada uma partição δ_n

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

a partição seguinte, δ_{n+1}, é obtida dividindo ao meio cada um dos subintervalos da partição δ_n. Correspondendo a cada partição δ_n construímos um polígono P_n formado pela reunião dos retângulos $R_1, \ldots, R_n$, onde R_j tem vértices: $(x_{j-1}, 0)$, $(x_j, 0)$, (x_j, m_j), (x_{j-1}, m_j), e m_j é o mínimo de f em x_{j-1}, x_j. Cf. a figura 31(b). Quando a partição se torna mais fina, os polígonos constituem, cada vez mais, melhores aproximações da área A. Portanto, para calcular a área A bastaria calcular o limite das áreas do polígono P_n. Tudo isso, porém, deve ser cuidadosamente justificado. No próximo parágrafo, desenvolveremos a noção de integral e as idéias geométricas aqui apresentadas serão convenientemente algebrizadas.

A seguir, apresentamos três exercícios que têm mais um interêsse histórico do que qualquer aspecto prático. O cálculo integral, que desenvolveremos, dará um processo simples de resolver êsses problemas.

Exercício 1. Calcule a área do polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r. Mostre que o limite da expressão obtida quando n tende a $+\infty$ é precisamente a área do círculo.

Exercício 2. Mostre que a área de um triângulo de base b e altura h é $bh/2$, usando o método de Cavalieri, que consiste em "aproximar" o triângulo por retângulos, do seguinte modo. Para cada n inteiro positivo, considere os segmentos paralelos à base, contidos no triângulo e à distâncias h/n, $2h/n, \ldots, (n-1)h/n$ da base. Construa, então, os n retângulos de altura h/n e bases nesses segmentos e na base do triângulo. Por exemplo, para $n = 4$ teríamos a figura abaixo:

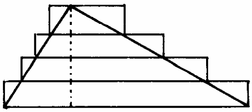


Fig. 32

Exercício 3. Arquimedes, no ano 250 AC, demonstrou que a parabola $y = x^2$ divide a área do retângulo R de vértices $(0, 0)$, $(b, 0)$, (b, b^2), $(0, b^2)$ na razão de 1:2. Êsse problema era muito difícil para uma época em que a noção de limite não estava estabelecida; o cálculo integral nasceria quase 2.000 anos depois! Explicamos, a seguir, o método de Arquimedes (deixando os detalhes para o leitor), que já contém o embrião do cálculo integral. Para cada n, divida o intervalo $[0, b]$ em n subintervalos de igual comprimento e considere os retângulos $R_1, \ldots, R_n$ onde R_j tem vértices nos pontos $(\frac{[j-1]b}{n}, 0)$, $(\frac{jb}{n}, 0)$, $(\frac{jb}{n}, [\frac{jb}{n}]^2)$, $(\frac{[j-1]b}{n}, [\frac{jb}{n}]^2)$. Mostre, então, que a soma das áreas dêsses retângulos é

$$\frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n} j^2.$$

Use indução e prove que

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

Passando ao limite, obtenha que a área entre a parábola, o eixo dos x e a reta $x = b$ é $b^3/_3$. Como a área do retângulo é b^3, o resultado de Arquimedes segue-se imediatamente.

5.2. INTEGRAL SUPERIOR E INTEGRAL INFERIOR

Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo fechado $[a, b]$, a qual é suposta limitada. Como definimos na seção 2.6 uma função é limitada se existem números reais M e m tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Uma *partição* π do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos de $[a, b] : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Dadas uma função f e uma partição π definimos as chamadas somas de Darboux-Riemann, a *soma superior* $S(f, \pi)$ e a *soma inferior* $s(f, \pi)$, pelas expressões:

$$(1) \qquad S(f, \pi) \equiv \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$$

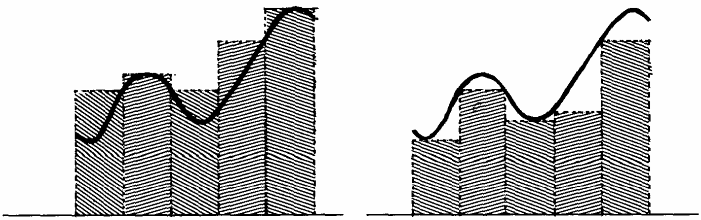
$$(2) \qquad s(f, \pi) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1})$$

onde $M_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$ e $m_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$. É claro que êsses sup's e inf's são finitos, uma vez que a função f é limitada. De fato, $m \leq m_j \leq M_j \leq M$. É claro que para qualquer partição π, tem-se

$$(3) \qquad s(f, \pi) \leq S(f, \pi).$$

Veja figura 33(a), onde a área hachurada representa a soma superior, e a figura 33(b), onde a área indicada representa a soma inferior. Apesar dessas ilustrações serem feitas para o caso de uma função contínua, as definições acima valem para qualquer função limitada.

Observe, também, que f não é necessàriamente positiva para todo x. O símbolo $\sum_{j=1}^{n}$, que se lê somatório de 1 a n, indica que se tem uma soma de n parcelas, cujo têrmo geral é escrito à sua direita. Por exemplo, $\sum_{j=1}^{n} 2^j = 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$.



(a) (b)

Fig. 33

Definição. Sejam π_1 e π_2 duas partições do intervalo $[a, b]$. π_2 é um ***refinamento*** de π_1 se o conjunto dos pontos que formam π_2 contém o conjunto dos pontos de π_1.

Exemplo 1. Seja π_1 uma partição dada: $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. A partição π_2 formada por êsses pontos e mais os pontos médios dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, para $j = 1, \ldots, n$, é um refinamento de π_1.

Exemplo 2. Sejam $\pi_1 = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ e $\pi_2 = \{y_0 = a < y_1 < \ldots < y_k = b\}$ duas partições dadas. A partição π_3 formada pela união dos pontos de π_1 e π_2 é um refinamento de π_1, bem como de π_2.

Teorema 5.1. *Sejam π_1 e π_2 duas partições do intervalo $[a, b]$, com π_2 sendo um refinamento de π_1. Então,*

$$S(f, \pi_2) \le S(f, \pi_1) \tag{4}$$

$$s(f, \pi_2) \ge s(f, \pi_1) \tag{5}$$

110

Demonstração. Seja $\pi_1 = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. A partição π_2 contém os mesmos pontos e mais pontos adicionais nos subintervalos abertos (x_{j-1}, x_j). Podemos construir uma sucessão (finita) de partições, a primeira sendo π_1, a última sendo π_2, e cada partição (a partir da segunda) é um refinamento da anterior pela adição de apenas um ponto. Portanto, basta provar o teorema para o caso em que $\pi_2 = \{x_0 = a < a < x_1 < \ldots < x_{j-1} < z < x_j < \ldots < x_n = b\}$ contém apenas um ponto a mais que π_1. Como

$$\sup\{f(x) : x_{j-1} \le x \le x_j\} \ge \begin{cases} \sup\{f(x) : x_{j-1} \le x \le z\} = M_{j,1} \\ \sup\{f(x) : z \le x \le x_j\} = M_{j,2} \end{cases}$$

e

$$\inf\{f(x) : x_{j-1} \le x \le x_j\} \le \begin{cases} \inf\{f(x) : x_{j-1} \le x \le z\} = m_{j,1} \\ \inf\{f(x) : z \le x \le x_j\} = m_{j,2} \end{cases}$$

obtemos

$$M_j(x_j - x_{j-1}) \ge M_{j,1}(z - x_{j-1}) + M_{j,2}(x_j - z)$$

$$m_j(x_j - x_{j-1}) \le m_{j,1}(z - x_{j-1}) + m_{j,2}(x_j - z)$$

Daí se seguem imediatamente as desigualdades (4) e (5) que queríamos provar.

Teorema 5.2. *Sejam π_1 e π_2 duas partições quaisquer de $[a,b]$, Então,*

(6) $$s(f, \pi_1) \leq S(f, \pi_2)$$

Demonstração. Seja π a partição obtida pela união dos pontos de π_1 com os pontos de π_2. Como π é um refinamento de π_1, a desigualdade (5) nos dá

(7) $$s(f, \pi_1) \leq s(f, \pi)$$

Como π é um refinamento de π_2, temos pela desigualdade (4):

(8) $$S(f, \pi) \leq S(f, \pi_2).$$

Finalmente, a desigualdade (6) decorre de (3), (7) e (8).

O teorema 5.2, através da desigualdade (6), diz que as somas inferiores são limitadas superiormente, pois, qualquer $S(f, \pi)$ é uma cota superior, Anàlogamente, as somas superiores são limitadas inferiormente. Portanto, pelo Postulado de Dedekind, o conjunto das somas inferiores tem um supremo, e o conjunto das somas superiores tem um ínfimo. Isso justifica as definições a seguir.

Definições. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função real limitada em $[a, b]$. A *integral superior,* que se designa por $\overline{\int_a^b} f$, é o ínfimo das somas superiores. Em símbolos:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}\},$$

onde $\mathcal{P}$ representa o conjunto de tôdas as partições de $[a, b]$. A *integral inferior,* que se designa por $\underline{\int_a^b} f(x)dx$, é o supremo das somas inferiores. Em símbolos

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{s(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}\}.$$

Decorre do teorema 5.2 que

(9) $$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

5.3. A INTEGRAL

Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é *integrável* se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

O valor comum das integrais superior e inferior é chamado a *integral* de f, que se designa por $\int_a^b f$. Usa-se, também, a notação $\int_a^b f(x)dx$. Portanto, se f é integrável, temos

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Exemplo de uma função limitada não integrável. Seja $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ a função de Dirichlet que a cada racional de $[0,1]$ associa o valor 0 e a cada irracional de $[0,1]$ o valor 1. Como o conjunto dos racionais (bem como o dos irracionais) é denso em $[0,1]$, temos que para qualquer partição π, os M_j's são todos iguais a 1 e os m_j's são todos iguais a 0. Logo, $S(f,\pi) = 1$ e $s(f,\pi) = 0$. Portanto, a integral superior é 1, enquanto a integral inferior é 0.

A função constante é integrável. A função $f(x) = k$ para todo x em $[a,b]$ é integrável e sua integral é igual a $k(b-a)$. De fato, para qualquer partição π, os M_j's e os m_j's são todos iguais a k. Logo, $S(f,\pi) = k(b-a)$ e $s(f,\pi) = k(b-a)$, para qualquer partição. Logo, as integrais superior e inferior são iguais a $k(b-a)$, donde se segue o que queríamos provar.

A seguir damos uma condição necessária e suficiente para uma função limitada ser integrável em $[a,b]$. Essa condição será muito útil em demonstrações de alguns teoremas das próximas seções. Ela, porém, não lança nenhuma luz quanto a tipos de funções que sejam integráveis; os teoremas 5.4 e 5.5 serão, em compensação, passos nessa direção.

Teorema 5.3. *Seja* $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ *uma função limitada em* $[a,b]$. *Então* f *é integrável se, e sòmente se, para qualquer* $\epsilon > 0$ *dado, existe uma partição* π *do intervalo* $[a,b]$ *tal que*

$$S(f,\pi) - s(f,\pi) < \epsilon.$$

Demonstração. Seja A o conjunto das somas inferiores $s(f,\pi)$; cada soma inferior é um número real, portanto, A é um conjunto de reais. Anàlogamente, seja B o conjunto das somas superiores $S(f,\pi)$. Pelo teorema 5.2 temos que $\alpha \leq \beta$, para qualquer $\alpha \in A$ e qualquer $\beta \in B$. Logo, $\sup A \leq \inf B$. Ora, $\sup A$ é a integral inferior de f e $\inf B$ é a integral superior de f. Logo, a condição de integrabilidade da f é $\sup A = \inf B$. Portanto, o presente teorema é conseqüência do seguinte resultado.

Lema 5.1. *Sejam* A *e* B *dois conjuntos de reais tais que* $\alpha \leq \beta$ *para todo* $\alpha \in A$ *e todo* $\beta \in B$. *Então* $\sup A = \inf B$ *se, e sòmente* *se, para qualquer* $\epsilon > 0$ *dado, existem* $\alpha \in A$ *e* $\beta \in B$ *tais que* $\beta - \alpha < \epsilon$.

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $\sup A = \inf B$. Ora, dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha + \epsilon > \sup A$, em virtude da definição de sup. Pois, se $\alpha + \epsilon \leq \sup A$ para todo $\alpha \in A$, então, $\alpha \leq \sup A - \epsilon$ para todo $\alpha \in A$, o que contradiria o fato de $\sup A$ ser a menor das cotas superiores de A. Então, usando a hipótese: $\inf B < \alpha + \epsilon$. Daí pela definição de inf segue-se que existe $\beta \in B$ tal que $\beta < \alpha + \epsilon$. Logo, $\beta - \alpha < \epsilon$. Recìprocamente, suponhamos, por contradição, que $\sup A < \inf B$. Seja $\epsilon = \inf B - \sup A > 0$. Como para qualquer $\alpha \in A$ e qualquer $\beta \in B$ temos $\beta - \alpha \geq \inf B - \sup A$. Logo, $\beta - \alpha \geq \epsilon$ para todo $\alpha \in A$ e todo $\beta \in B$, o que contradiz a hipótese.

Antes de prosseguir enunciamos um resultado que mostra que a classe das funções integráveis não é demasiadamente pequena.

Teorema 5.4. *Tôda função contínua* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *em um intervalo fechado* $[a, b]$ *é integrável.*

A demonstração do teorema 5.4 será feita na próxima seção. O leitor poderá aceitar o teorema e saltar a demonstração, sem que isso comprometa sua compreensão do resto do trabalho. O próximo resultado mostra que há funções descontínuas que são integráveis.

Teorema 5.5. *Tôda função não decrescente** $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *definida em um intervalo fechado* $[a, b]$ *é integrável.*

Demonstração. A idéia é utilizar o teorema 5.3. Dado $\epsilon > 0$ tome uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ tal que o comprimento dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$ seja menor que $\epsilon/(f(b) - f(a))$. Aqui supomos $f(b) > f(a)$, pois, de outro modo, f seria constante e já sabemos que uma função constante é integrável. Observamos a seguir que f sendo não decrescente, temos

$$(1) \qquad m_j = f(x_{j-1}) \text{ e } M_j = f(x_j), \quad (j = 1, \ldots, n),$$

Logo,

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq$$

---

* Lembramos ao leitor que estamos sempre considerando funções limitadas.

$$\leq \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)$$

e daí

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) \leq \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} (M_n - m_1) = \epsilon.$$

O resultado se segue pela aplicação do teorema 5.3.

Observação. Decorre do teorema 5.5 que tôda função não crescente é integrável. De fato, se f é não crescente, então, $-f$ é não decrescente. Logo, pelo teorema 5.5, $-f$ é integrável. Mas, $f = -(-f)$, e pelo teorema 5.7 (cf. seção 5.5), segue-se que f é integrável.

5.4. DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.4.

Apresentaremos inicialmente um resultado que será utilizado na demonstração do teorema 5.4 e posteriormente na seção 5.7.

Lema 5.2. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função contínua. Então, dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ *para* $|x_1 - x_2| < \delta$.

Observação. Compare o enunciado dêsse lema com a definição de função contínua dada em têrmos de ϵ e δ. Para enfatizar a diferença vamos repetir aquela definição. Uma função $f : I \to \mathbf{R}$ é contínua em um intervalo I se dado $\epsilon > 0$ e dado $x_0 \in I$, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ e de x_0) tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$. Observe que no enunciado do lema acima, δ depende tão sòmente do ϵ dado. Êle serve para todos os pontos do intervalo, i.e., há uma certa uniformidade na sua determinação. Tal uniformidade não existe necessàriamente para tôdas as funções contínuas. Por exemplo, a função $1/x$ definida no intervalo aberto $(0, 1)$; quanto mais perto esteja x_0 do ponto 0 menor deve ser o δ para atender o mesmo ϵ. Quando o ϵ depende sòmente do δ dado, e não do particular ponto x_0 no intervalo I, a função é chamada uniformemente contínua. A função $1/x$, exemplificada acima não é uniformemente contínua no intervalo $(0, 1)$. O que o lema 5.2 nos diz é que tôda função contínua em um intervalo fechado é uniformemente contínua.

Demonstração do lema 5.2. Suponhamos por contradição que não exista tal δ. Então, para uma sucessão $\delta_n > 0$ tendendo a zero, existem pontos a_n e b_n em $[a, b]$ tais que

(1) $$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \epsilon \quad \text{e} \quad |a_n - b_n| < \delta_n.$$

Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsucessão $\{a_{n_j}\}$ de $\{a_n\}$ convergindo para um número real $c \in [a, b]$. Como

$$|b_{n_j} - c| \leq |b_{n_j} - a_{n_j}| + |a_{n_j} - c|$$

segue-se que $\{b_{n_j}\}$ também converge para c. Pela continuidade de f, temos que

$$\lim f(a_{n_j}) = f(c)$$

e

$$\lim f(b_{n_j}) = f(c),$$

o que mostra que $f(a_{n_j}) - f(b_{n_j})$ tende a 0. Isto, porém, contradiz (1).

Demonstração do teorema 5.4. Suponhamos, por contradição, que a função contínua f não seja integrável. Então,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} = d > 0. \tag{2}$$

Consideremos agora uma sucessão π_n de partições do intervalo $[a, b]$ assim definidas: $\pi_1 = \{a < (a + b)/2 < b\}$ e π_{n+1} é obtida de π_n pela adição dos pontos médios dos subintervalos determinados pelos pontos de π_n. Pelo lema 5.2, dado $\epsilon = d/(b-a)$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para $|x_1 - x_2| < \delta$. Como o comprimento dos subintervalos determinados pelas partições π_n tende a zero quando n tende a infinito, teremos uma partição $\pi_{n_o} = \{x_o = a < x_1 < \ldots < x_k = b\}$ tal que $|x_j - x_{j-1}| < \delta$. Logo, $M_j - m_j < \epsilon$, onde M_j e m_j são, respectivamente, o máximo é o mínimo de f em $[x_{j-1}, x_j]$. Como

$$S(f, \pi_{n_o}) - s(f, \pi_{n_o}) = \sum_{j=1}^{k} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$$

segue-se que

$$S(f, \pi_{n_o}) - s(f, \pi_{n_o}) < \epsilon \sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{j-1}) = \epsilon(b - a) = d. \tag{3}$$

Por outro lado,

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S(f, \pi_{n_o}) - s(f, \pi_{n_o}), \tag{4}$$

pelas definições das integrais superior e inferior. Finalmente, as relações (2), (3) e (4) dão que $d < d$, o que não é possível. Tal contradição provém de admitirmos (2), ou seja que f não é integrável. A demonstração do teorema 5.4 fica assim concluída.

Exercício 1. Seja f uma função contínua e limitada no intervalo $(a, b]$. Tome $f(a) = 0$. Mostre que f é integrável no intervalo

$[a, b]$. (Sugestão: Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo x em $[a, b]$. A idéia é aplicar o teorema 5.3. Dado $\varepsilon > 0$, tome c em $[a, b]$ tal que $2M(c - a) \leq \varepsilon/2$. A restrição $\tilde{f}$ de f a $[c, b]$ é contínua. Logo, existe uma partição π de $[c, b]$ tal $S(\tilde{f}, \pi) - s(\tilde{f}, \pi) < \varepsilon/2$.)

Exercício 2. No exercício anterior mostre que o valor de f no ponto a não altera a integrabilidade de f.

Exercício 3. Mostre que a função

$$f(x) = \operatorname{sen}(1/x) \text{ para } 0 < x \leq 1$$
$$f(0) = 0$$

é integrável em $[0, 1]$.

5.5. OPERAÇÕES COM FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

Nesta seção mostraremos que a soma, a diferença e o produto de funções integráveis são funções integráveis.

Necessitaremos do seguinte resultado sôbre sup e inf de funções, cf. seção 2.6.

Lema 5.3. *Sejam $f : I \to \mathbf{R}$ e $g : I \to \mathbf{R}$ duas funções limitadas definidas em um intervalo fechado* I. *Então,*

(1) $$\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$$

(2) $$\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$$

Demonstração. Pela definição de supremo:

$$f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup g \leq \sup f + \sup g$$

para todo $x \in I$. Logo, (1) se segue. A desigualdade (2) se demonstra de modo análogo.

Teorema 5.6. *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ são duas funções (limitadas) integráveis, então $f + g$ é integrável e*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Demonstração. Seja $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Aplicando o lema 5.3 em cada um dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, obtemos

(3) $$S(f + g, \pi) \leq S(f, \pi) + S(g, \pi)$$

$$(4) \qquad s(f+g,\pi) \geq s(f,\pi) + s(g,\pi)$$

Tomando inf das $S(f+g,\pi)$ para $\pi \in \mathcal{P}$, onde $\mathcal{P}$ é a coleção de tôdas as partições, obtemos a partir de (3):

$$(5) \qquad \overline{\int_a^b} f+g \leq S(f,\pi) + S(g,\pi)$$

para todo $\pi \in \mathcal{P}$. Logo (5) nos dá:

$$(6) \qquad \overline{\int_a^b} f+g \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

Anàlogamente, trabalhando com sup em (4) obtemos

$$(7) \qquad \underline{\int_a^b} f+g \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g.$$

De (6) e (7) e usando a hipótese de que f e g são integráveis, concluímos

$$\overline{\int_a^b} f+g \leq \underline{\int_a^b} f+g.$$

E, como a integral inferior é sempre menor ou igual que a integral superior, obtemos

$$\overline{\int_a^b} f+g = \underline{\int_a^b} f+g,$$

o que prova o teorema 5. 6.

Lema 5. 4. *Seja* $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ *uma função limitada em um intervalo* I. *Então:*

(a) $\qquad \sup(kf) = k \sup f \;$ e $\; \inf(kf) = k \inf f, \; k > 0$

e

(b) $\qquad \sup(-f) = -\inf f \;$ e $\; \inf(-f) = -\sup f.$

Demonstração. (a) Seja M o supremo de kf. Isso significa que $kf(x) \leq M$ para todo $x \in I$, e que, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in I$ tal que $kf(x_0) > M - \epsilon$. A última desigualdade implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $x_1 \in I$ tal que $kf(x_1) > M - k\epsilon$, ou seja $f(x_1) > M/k - \epsilon$. Êsse fato juntamente com a desigualdade $f(x) \leq M/k$ para todo $x \in I$ mostra que M/k é o supremo de kf. A segunda parte de (a) se demonstra de modo análogo.

(b) Basta demonstrar a primeira relação, pois, a segunda segue-se dela, substituindo f por $-f$. Seja M o supremo de $-f$. Isso quer dizer que $-f(x) \leq M$ para todo $x \in I$ e que, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in I$ tal que $-f(x_0) > M - \epsilon$. Logo, temos: $f(x) \geq -M$ para todo $x \in I$ e, dado $\epsilon > 0$, existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) < -M + \epsilon$. Isso significa que $-M$ é o ínfimo de f. Logo, temos o resultado que se queria provar.

Teorema 5.7. *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é (limitada) integrável e k é um número real, então, kf é integrável e*

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f.$$

Demonstração. 1) $k > 0$. Dada uma partição qualquer π de $[a, b]$, temos $S(kf, \pi) = kS(f, \pi)$ e $s(kf, \pi) = ks(f, \pi)$, pois, $\sup(kf) = k \sup f$ e $\inf(kf) = k \inf f$. Logo,

$$\overline{\int_a^b} kf = k\overline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} kf = k\underline{\int_a^b} f.$$

Como f é integrável, o resultado se segue.

2) $k < 0$. Basta provar que $-f$ é integrável, pois, o caso geral, kf, será conseqüencia dêsse caso e do 1): $kf = (-k)(-f)$. Seja π uma partição qualquer de $[a, b]$. Como $\sup(-f) = -\inf f$ e $\inf(-f) = -\sup f$, temos

118

$$S(-f, \pi) = -s(f, \pi) \quad \text{e} \quad s(-f, \pi) = -S(f, \pi).$$

Logo,

$$\overline{\int_a^b}(-f) = -\underline{\int_a^b} f \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b}(-f) = -\overline{\int_a^b} f.$$

Essas relações, juntamente com o fato que f é integrável, implicam que $-f$ é integrável e $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$.

Corolário 5.1. *A diferença $f - g$ de duas funções (limitadas) integráveis é integrável.*

Lema 5.5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função (limitada) integrável tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então, a função $f^2 : [a, b] \to \mathbf{R}$ definida por $f^2(x) = [f(x)]^2$ é integrável.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, seja $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) < \epsilon,$$

em virtude do teorema 5.3. Sejam M_j e m_j o sup e o inf, respectivamente, da função f no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. É imediato que M_j^2

e m_j^2 são, respectivamente, o sup e o inf de f^2 em $[x_{j-1}, x_j]$. Logo,

$$S(f^2, \pi) - s(f^2, \pi) = \sum_{j=1}^{n} (M_j^2 - m_j^2)(x_j - x_{j-1})$$

E, como $M_j^2 - m_j^2 = (M_j + m_j)(M_j - m_j) \leq 2M(M_j - m_j)$, onde M é o sup de f em $[a, b]$, obtemos

$$S(f^2, \pi) - s(f^2, \pi) \leq 2M \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) =$$

$$= 2M[S(f, \pi) - s(f, \pi)] < 2M\epsilon.$$

Logo, aplicando o teorema 5.3 à função f^2, concluímos que ela é integrável.

Corolário 5.2. *O quadrado f^2 de uma função integrável (não necessàriamente ≥ 0) $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ é integrável.*

Demonstração. Seja $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$. A função $f + k$ é integrável (em virtude do teorema 5.6) e não negativa, i.e. $f(x) + k \geq 0$. Logo, pelo lema anterior $(f + k)^2$ é integrável. Como

$$f^2 = (f + k)^2 - 2kf - k^2,$$

segue-se pelos teoremas 5.7 e 5.6 que f^2 é integrável.

Teorema 5.8. *O produto fg de duas funções integráveis $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ e $g: [a, b] \to \mathbf{R}$ é integrável.*

Demonstração. Pelo teorema 5.6 e pelo corolário 5.1, temos que $f + g$ e $f - g$ são integráveis. Pelo corolário 5.2, segue-se que $(f + g)^2$ e $(f - g)^2$ são ambos integráveis. Aplicando os teoremas 5.6 e 5.7 novamente temos que fg é integrável, pois,

$$fg = \tfrac{1}{4}[(f + g)^2 - (f - g)^2].$$

Observação. A integrabilidade do produto fg de duas funções f e g não implica que f e g sejam integráveis.

Exemplo. A função $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = 1$ se x é irracional e $f(x) = -1$ se x é racional, não é integrável; mas $f^2(x) \equiv 1$ o é.

Exercício 1. Seja c um ponto do intervalo $[a, b]$, e α um número real. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

é integrável, e $\int_a^b f dx = 0$.

Exercício 2. Generalize o exercício anterior para o caso de um número finito de pontos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no intervalo $[a, b]$.

Exercício 3. Se f e g são duas funções integráveis em $[a, b]$, tais que $f(x) = g(x)$ para todo x de $[a, b]$ com excepção de um número finito de pontos, então

$$\int_a^b f dx = \int_a^b g dx$$

5.6. VALOR ABSOLUTO DE UMA FUNÇÃO INTEGRÁVEL

É conveniente para o estudo do valor absoluto de uma função integrável a introdução de duas funções auxiliares, as partes positiva e negativa de uma função.

Definição. Seja $f : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ uma função definida em um intervalo I. A *parte positiva* de f, que se representa por f^+, é assim definida:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

A *parte negativa* de f, que se representa por f^-, é definida por

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

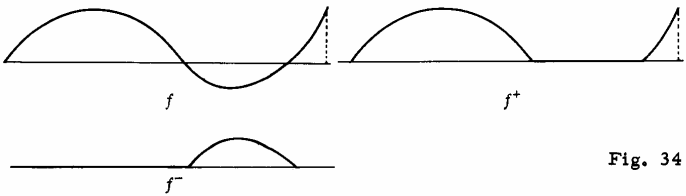


Fig. 34

É imediato que

(1) $$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Observação. A rigor f^+ devia ser chamada a parte não negativa e f^- a parte não positiva.

Lema 5.6. *A parte positiva f^+ de uma função integrável $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ é integrável.*

Demonstração. A idéia é aplicar o teorema 5.3. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tome uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que

$$(2) \qquad S(f,\pi) - s(f,\pi) < \varepsilon.$$

Sejam M_j e m_j, respectivamente, o sup e o inf de f em $[x_{j-1}, x_j]$. E, sejam M_j^+ e m_j^+, respectivamente, o sup e o inf de f^+ no mesmo subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Há dois casos a considerar:

caso 1. Existe um $x \in [x_{j-1}, x_j]$ tal que $f(x) > 0$. Então, $M_j^+ = M_j$ e $m_j^+ \geq m_j$. Logo, $M_j^+ - m_j^+ \leq M_j - m_j$.

caso 2. Para qualquer $x \in [x_{j-1}, x_j]$ tem-se $f(x) \leq 0$. Logo, $f^+ = 0$, o que implica $M_j^+ = m_j^+ = 0$. Logo, neste caso, também temos $M_j^+ - m_j^+ \leq M_j - m_j$.

Portanto,

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} (M_j^+ - m_j^+)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1})$$

Como o primeiro membro de (3) é $S(f^+,\pi) - s(f^+,\pi)$ e o segundo membro de (3) é $S(f,\pi) - s(f,\pi)$, concluímos, usando a desigualdade (2), que $S(f^+,\pi) - s(f^+,\pi) < \varepsilon$. Logo, pelo teorema 5.3 segue-se que f^+ é integrável.

Corolário 5.3. *A parte negativa f^- de uma função integrável é integrável.*

Demonstração. Pela relação (1) temos $f^- = f^+ - f$. Como f e f^+ são integráveis, o resultado segue-se pela aplicação do corolário 5.1.

Teorema 5.9. *O valor absoluto $|f|$ de uma função integrável $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ é integrável.*

Demonstração. Pelo lema 5.6 e pelo corolário 5.3, temos, respectivamente, que f^+ e f^- são integráveis. Aplicando o teorema 5.6, concluímos que $|f| = f^+ + f^-$ é também integrável.

Observação. Não é verdade que a integrabilidade de $|f|$ implica a integrabilidade de f, conforme se vê pelo exemplo abaixo.

Exemplo. Seja $f: [0,1] \to \mathbf{R}$ a função assim definida: $f(x) = -1$ se x é racional e $f(x) = 1$ se x é irracional. A função $|f|$ é a função constante igual a 1, e, portanto, integrável. Entretanto, a função f não é integrável, como já se observou acima.

Mostraremos agora que a operação de integração preserva ordem. Isto é, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.10. (a) *Seja $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função integrável tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Então,*

$$\int_a^b f \geq 0.$$

(b) *Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$ e $f \leq g$ então,*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demonstração. (a) Para qualquer partição π, os sup's M_j nos diversos subintervalos são ≥ 0. Logo, $S(f, \pi) \geq 0$ para qualquer π. Portanto,

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f, \pi) : \pi \in \mathcal{P}\} \geq 0.$$

b) Pelo corolário 5.1 a função $g - f$ é integrável. Como $g - f \geq 0$ podemos aplicar a parte (a) dêste teorema e concluir que $\int_a^b (g - f) \geq 0$. Aplicando novamente o corolário 5.1 temos $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$, o que nos dá o resultado a provar.

Corolário 5.4. *Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Então,*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

Teorema 5.11. *Se f é integrável em $[a, b]$, então, $|f|$ é integrável e*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Demonstração. A integrabilidade de $|f|$ foi estabelecida no teorema 5.9. Aplicando o teorema 5.10 a $-f \leq |f| \leq f$ obtemos

$$-\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b f,$$

de onde se segue o resultado.

5.7. A INTEGRAL COMO LIMITE

Como vimos na seção 5.3, a integral de uma função f, quando existe, é o ínfimo do conjunto de números reais $S(f, \pi)$, onde π percorre a coleção $\mathcal{P}$ de tôdas as partições. E, é também igual ao sup das somas inferiores. Êsse modo de definir a integral deu como conseqüencia o importante teorema 5.3, que foi de bastante utilidade em várias demonstrações. É, porém, fácil de compreender que os processos de tomar sup e inf não são construtivos, uma vez que êles envolvem a consideração de tôdas as possíveis partições de $[a, b]$, e êsse conjunto $\mathcal{P}$ é demasiadamente grande. É desejável estabelecer uma maneira prática de calcular a integral de uma dada função. Uma idéia seria tomar uma sucessão de partições cada vez mais finas, formar uma sucessão de somas associadas a essas partições, e tentar demonstrar que elas convergiriam para a integral procurada.

Concentraremos nossa atenção em uma dada função contínua $f:[a, b] \to \mathbf{R}$. Portanto, sabe-se pelo teorema 5.4 que a integral existe.

Definição 1. Dada uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, um conjunto Y contendo n pontos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ é *admissível para* π se $y_j \in [x_{j-1}, x_j]$ para $j = 1, \ldots, n$.

Exemplos. y_j pode ser o meio do intervalo $[x_{j-1}, x_j]$. No caso de uma função contínua, y_j pode ser tomado como o ponto onde f atinge seu máximo (ou mínimo) no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$.

Definição 2. Dados uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ e um conjunto admissível $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ associado a π, a *soma de Riemann* associada a π e Y, que se designa por $\sigma(f, \pi, Y)$, é definida por

$$\sigma(f, \pi, Y) = \sum_{j=1}^{n} f(y_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Exemplos, A soma superior $S(f, \pi)$ e a soma inferior $s(f, \pi)$ são somas de Riemann.

Definição 3. A *norma* de uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, que se designa por $\|\pi\|$, é definida como o comprimento do maior dos subintervalos $[x_{j-1}, x_j]$.

Teorema 5.12. *Seja* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função contínua definida em* $[a, b]$. *Seja* $\{\pi_k\}$ *uma sucessão de partições do intervalo* $[a, b]$ *tais que* $\|\pi_k\| \to 0$ *quando* $k \to \infty$. *Correspondendo a cada* π_k *é dado um conjunto admissível* Y_k. *Então, as somas de Riemann* $\sigma(f, \pi_k, Y_k)$ *convergem para a integral de* f.

Demonstração. É imediato que

$$s(f, \pi_k) \leq \sigma(f, \pi_k, Y_k) \leq S(f, \pi_k)$$

para tôda partição π_k. Se provarmos que dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $k_0 > 0$ tal que $S(f, \pi_k) - s(f, \pi_k) < \varepsilon$ para $k \geq k_0$, então, segue-se que tôdas três sucessões $\{s(f, \pi_k)\}$, $\{\sigma(f, \pi_k, Y_k\}$ e $\{S(f, \pi_k)\}$ convergem para a integral de f em $[a, b]$, pois,

$$s(f, \pi_k) \leq \int_a^b f \leq S(f, \pi_k).$$

Ora, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/(b - a)$ para $|x_1 - x_2| < \delta$, em virtude do lema 5.2. Como $\|\pi_k\| \to 0$, seja k_0 tal que $\|\pi_k\| < \delta$ para todo $k \geq k_0$. Logo, para um tal π_k, digamos $\pi_k = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$, temos

124

$$S(f, \pi_k) - s(f, \pi_k) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq$$
$$\leq \varepsilon/(b - a) \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon.$$

Portanto, a demonstração do teorema 5.12 está concluída.

Exercício. f é contínua em $[0, 1]$. Tome partições em $2, 2^2, 2^3, \ldots$, em geral 2^n, subintervalos de igual comprimento e para conjuntos admissíveis os meios dos subintervalos. Prove que

$$\sigma(f, \pi_n, Y_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f\left(\frac{2k - 1}{2^{n+1}}\right).$$

6

AS FUNÇÕES LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL

6.1. O LOGARÍTMO

Consideremos a função $f(x) = 1/x$ para $x > 0$. Sendo f contínua em qualquer intervalo fechado $[a, b]$ contido em $(0, \infty)$ podemos definir a função

$$F(x) = \int_1^x (1/t)\,dt$$

para qualquer $x \in (0, \infty)$. O valor da função F no ponto x pode ser interpretado gràficamente como a área entre o eixo dos x, a curva $1/x$, a reta vertical que passa pelo ponto 1 e a reta vertical que passa pelo ponto x, cf. figura 35. Se $x < 1$, $F(x)$ é a área com sinal negativo, pois, neste caso

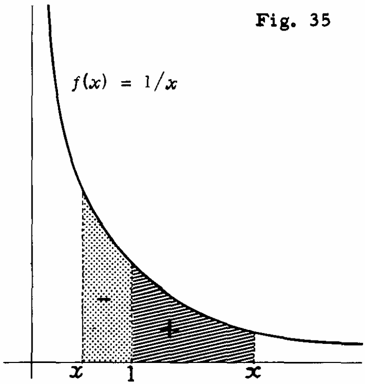
$$\int_1^x (1/t)\,dt = -\int_x^1 (1/t)\,dt$$

Definição. A função F, definida acima, é chamada a *função logarítmica*, e o valor $F(x)$ de F no ponto x é chamado o *logarítmo de* x e se representa por $\log x$. Observe que $\log x$ está definido para todo $x > 0$. Para referência futura repetimos a definição de $\log x$

(1) $\log x = \int_1^x (1/t)\,dt, \quad x > 0$

Decorre, imediatamente, da definição (1) que

Fig. 35



(2) $\log 1 = 0$

(3) $\log x > 0$ para $x > 1$; $\log x < 0$ para $x < 1$.

Teorema 6.1. *A função* $\log x$ *é crescente.*

Demonstração. Se $x_1 < x_2$ temos

$$(4) \qquad \log x_2 - \log x_1 = \int_1^{x_2} (1/t)dt - \int_1^{x_1} (1/t)dt = \int_{x_1}^{x_2} (1/t)dt.$$

Aplicando o corolário 5.4 ao último membro de (4) e como $1/t \geq$ $\geq 1/x_2$, temos:

$$(5) \qquad \log x_2 - \log x_1 \geq (x_2 - x_1)(1/x_2) > 0$$

Logo, $\log x_2 > \log x_1$, se $x_2 > x_1$.

Teorema 6.2. *A função* $\log x$ *é contínua.*

Demonstração. Seja $x_0 > 0$ fixado. Então, para $x > x_0$ temos, como em (4)

$$(6) \qquad \log x - \log x_0 = \int_{x_0}^{x} (1/t)dt \leq (1/x_0)(x - x_0),$$

onde a desigualdade foi obtida usando o corolário 5.4. Por outro lado, para $x_0/2 < x < x_0$, temos

$$(7) \qquad \log x_0 - \log x = \int_{x}^{x_0} (1/t)dt \leq (1/x)(x_0 - x) \leq (2/x_0)(x_0 - x)$$

Se $\{x_n\}$ é uma sucessão decrescente convergindo a x_0, então, usando (6) temos

$$0 < \log x_n - \log x_0 \leq (1/x_0)(x_n - x_0),$$

o que implica que $\log x_n \to \log x_0$. Isto é,

$$(8) \qquad \lim_{x \to x_0^+} \log x = \log x_0.$$

Por outro lado, se $\{x_n\}$ é uma sucessão crescente tendendo a x_0, temos usando (7):

$$0 < \log x_0 - \log x_n \leq 2/x_0(x_0 - x_n),$$

o que implica que $\log x_n \to \log x_0$. Logo,

$$(9) \qquad \lim_{x \to x_0^-} \log x = \log x_0.$$

Finalmente, (8) e (9) dão a continuidade de log para $x = x_0$.

Teorema 6.3. *A função* log *é derivável e*

(10) $$\frac{d}{dx}(\log x) = 1/x$$

Demonstração. Seja $x_0 > 0$ fixado. A razão incremental correspondente é

(11) $$q(x) = \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} (1/t)dt$$

Se $x > x_0$, temos pelo corolário 5.4:

(12) $$\frac{1}{x}(x - x_0) \le \int_{x_0}^{x} (1/t)dt \le \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

o que também é óbvio do fato que a área hachurada está compreendida entre as áreas dos retângulos R_1 e R_2 da figura 36.

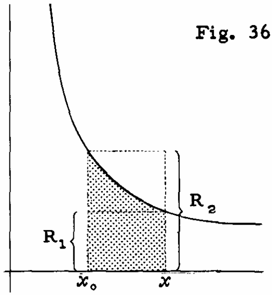


Fig. 36

Portanto, usando (12) em (11) obtemos:

(12') $$\frac{1}{x} \le q(x) \le \frac{1}{x_0},$$

o que implica que

(13) $$\lim_{x \to x_0} q(x) = 1/x_0$$

Anàlogamente, se $x_0 > x$ temos

(14) $$\frac{1}{x_0}(x_0 - x) \le \int_{x}^{x_0} (1/t)dt \le \frac{1}{x}(x_0 - x)$$

Portanto, usando (14) em (11) obtemos

(14') $$\frac{1}{x_0} \le q(x) \le \frac{1}{x},$$

o que implica que

(15) $$\lim_{x \to x_0^-} q(x) = 1/x_0$$

Finalmente, (13) e (15) implicam que log é derivável em x_0 e $(\log)'(x_0) = 1/x_0$, como queríamos provar.

Teorema 6.4. *Se a e b são reais positivos, então,*

(16) $$\log(ab) = \log a + \log b$$

Demonstração. Considere a função $g(x) = \log(ax)$ definida para $x > 0$. g é uma função composta $g = \log \circ h$, onde $h(x) = ax$. Pelo teorema sôbre derivação de funções compostas

$$g'(x) = (\log)'(h(x)) \cdot h'(x)$$

ou seja

$$g'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}.$$

Logo,

$$(g(x) - \log x)' = 0,$$

o que implica, em virtude do teorema 3.10, que $g(x) = \log x + k$, onde k é uma constante. Portanto,

$$\log(ax) = \log x + k \tag{17}$$

para todo $x > 0$. Fazendo $x = 1$ em (17) e lembrando que $\log 1 = 0$, obtemos $k = \log a$. Logo,

$$\log(ax) = \log a + \log x$$

para todo $x > 0$. Em particular, para $x = b$ temos (16).

Por indução podemos provar a seguinte generalização do teorema 6.4.

Teorema 6.4'. *Se $a_1, \ldots, a_n$ são reais positivos, então,* $\log(a_1 \ldots a_n) = \log a_1 + \ldots + \log a_n$.

Corolário 6.1. *Se $a > 0$ se r é um racional positivo, então,*

$$\log a^r = r \log a \tag{18}$$

Demonstração. Se $r = n$, um inteiro positivo, o resultado segue-se diretamente do teorema 6.4', com $a_1 = \ldots = a_n = a$. Se $r = \frac{1}{n}$, usamos ainda o teorema 6.4', com $a_1 = \ldots = a_n = a^{1/n}$ e obtemos

$$\log a = n \log a^{1/n},$$

que dá (18) neste caso. Finalmente, se $r = m/n$ temos, aplicando os dois casos particulares já provados

$$\log a^{m/n} = m \log a^{1/n} = (m/n)\log a.$$

Corolário 6.2. *Se* $a > 0$, *então*, $\log a^{-1} = -\log a$.

Demonstração. Usando o teorema 6.4 temos

$$0 = \log 1 = \log(aa^{-1}) = \log a + \log a^{-1},$$

o que dá o resultado a provar.

Decorre imediatamente dos corolários 6.1 e 6.2 que

$$\log a^r = r \log a, \quad a > 0, \quad r\text{-racional}, \tag{19}$$

onde r pode ser positivo, negativo ou nulo. A formula (19) é também válida para o caso de r ser um real qualquer. Entretanto, não estamos ainda em condições de provar êsse resultado mais geral, pois, ainda não atribuímos um sentido a a^r, onde r é um irracional.

Corolário 6.3. *Para tôda sucessão* $\{x_n\}$ *tendendo a* $+\infty$ *temos*

$$\log x_n \to +\infty .$$

Demonstração. Como a função log é crescente, basta mostrar isso para uma particular sucessão. Tomemos a sucessão $\{x_n\} = \{2^n\}$. Pelo corolário 6.1, $\log 2^n = n \log 2$, e como $\log 2 > 0$, segue-se que $n \log 2 \to +\infty$.

Corolário 6.4. *Para tôda sucessão* $\{x_n\}$ *tendendo a* 0 *temos*

$$\log x_n \to -\infty.$$

Demonstração. Como na demonstração anterior, basta provar isso para uma particular sucessão. Tomemos a sucessão $\{x_n\} = \{2^{-n}\}$. Pela fórmula (19) acima temos:

$$\log 2^{-n} = -n \log 2 \to -\infty.$$

Pelas informações colegidas nos teoremas 6.1, 6.2 e 6.3 e nos corolários 6.3 e 6.4, vemos que o gráfico de $\log x$ tem o aspecto indicado na figura 37:

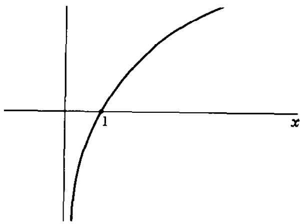


Fig. 37

Exercício 1. Seja $[a, b]$ um intervalo fechado contido na semi-reta $(0, +\infty)$. Mostre que

$$|\log x - \log y| \le \frac{1}{a}|x - y| \tag{*}$$

para todos x, y em $[a, b]$. (Essa desigualdade mostra que a função log é lipschitziana em cada intervalo $[a, b]$, e a constante de Lipschitz depende do intervalo.) Mostre como (*) implica o teorema 6.2.

Exercício 2. Mostre que a função $\log x$ é côncava. (Sugestão: use o exercício 4 da seção 3.6.)

Exercício 3. (i) Mostre que a equação $x = \log x$ não tem solução.

(ii) Mostre que a equação $x - 1 = \log x$ tem uma única solução.

Exercício 4. Obtenha a série de Taylor da função $\log(1 + x)$, relativamente a $x = 0$. Mostre que essa série converge, para todo $|x| < 1$.

Exercício 5. Prove que $\lim\limits_{x \to 0+} x \log x = 0$. (Sugestão: use o teorema do valor médio para a função $\log x$ no intervalo $[x^{3/2}, x]$, para $0 < x < 1$.)

Exercício 6. Prove que $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$. (Sugestão: use o teorema do valor médio para a função $\log x$ no intervalo $[x, x^{3/2}]$, para $x > 1$.)

Exercício 7. Mostre que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - n \log x) = +\infty$, onde n é um número real dado. (Sugestão: O caso $n \leq 0$ é trivial. Para o caso $n > 0$, use o teorema do valor médio para a função $\log x$ no intervalo $[x, x^{3/2}]$, $x > 1$.)

6.2. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Provamos na seção 6.1 que a função $\log : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$ é crescente. Logo, temos uma função inversa bem definida

$$\mathrm{E} : \mathrm{R} \to \mathbf{R}^+, \quad y \to \mathrm{E}(y)$$

onde

(1) $$\log \mathrm{E}(y) = y.$$

Decorre, imediatamente, da definição e de propriedades da função inversa que:

(2) $$\mathrm{E}(0) = 1.$$

(3) $$\mathrm{E}(y) > 1 \quad \text{para} \quad y > 0, \quad \mathrm{E}(y) < 1 \quad \text{para} \quad y < 0.$$

(4) $\mathrm{E}(y)$ é crescente e contínua.

(5) $\qquad E(y)$ é derivável e $E'(y) = E(y)$.

Demonstração de (5). Pelo teorema sôbre a derivação de funções inversas, temos

$$E'(y) = \frac{1}{(\log)'(E(y))} = \frac{1}{1/E(y)} = E(y),$$

pois, $(\log)'(x) = 1/x$, a qual nunca se anula.

(6) $$E(y_1 + y_2) = E(y_1)E(y_2).$$

Demonstração de (6). Por (1) temos

$$\log E(y_1 + y_2) = y_1 + y_2 = \log E(y_1) + \log E(y_2)$$

Pelo teorema 6.4 aplicado ao último membro da igualdade acima

$$\log E(y_1 + y_2) = \log\{E(y_1)E(y_2)\}.$$

Como a função log é injetiva (pois é crescente), segue-se que se dois números têm o mesmo logarítmo, então, êles devem ser iguais. Tem-se, pois, a relação (6).

Por indução prova-se uma generalização de (6):

(7) $$E(y_1 + \ldots + y_n) = E(y_1) \ldots E(y_n)$$

Daí se segue que $E(ny) = [E(y)]^n$ e $E(\frac{1}{n}y) = [E(y)]^{1/n}$. Logo, $E(ry) = [E(y)]^r$ para qualquer racional $r > 0$. Usando (1) e (6) temos

$$1 = E(0) = E(x - x) = E(x)E(-x),$$

o que prova que $E(-x) = E(x)^{-1}$. Logo,

(8) $$E(ry) = [E(y)]^r$$

para qualquer r racional (positivo, negativo ou nulo). De (8) segue-se que $E(n) = E(1)^n$ e como $E(1) > 1$ temos que $E(n) \to +\infty$. Usando ainda (8) temos $E(-n) = E(1)^{-n}$, o que implica que $E(-n) \to 0$. Logo, o gráfico de $E(y)$ deve ser como se indica abaixo

Exercício. Mostre que a função $E(x)$ é convexa.

O número e. O valor da função E no ponto 1 é designado pela letra e. Então, o número e é assim *definido:*

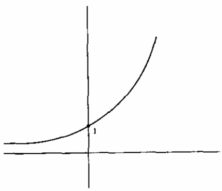


Fig. 38

$$E(1) = e.$$

Em virtude de (8) temos que

$$E(r) = e^r$$

para qualquer racional r. *Definimos* $e^y = E(y)$, para y irracional. Logo,

$$E(y) = e^y \tag{9}$$

para todo y real.

Exercício 1. Trace os gráficos das funções: e^{-y}, e^{ay} onde a é um real qualquer.

Exercício 2. Obtenha a série de Taylor, relativamente a $x = 0$, para a função e^x. Mostre que essa série converge, para todo x real.

Exercício 3. Mostre que $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$. (Sugestão: use o exercício 7 da seção 6.1.)

Exercício 4. Trace o gráfico da função $x \log x$, para $x \geq 0$. Determine o ponto onde ocorre o mínimo da função. Cf. exercício 5 da seção 6.1.

Exercício 5. Trace o gráfico da função $(\log x)/x$, para $x > 0$. Determine o ponto onde ocorre o máximo da função.

Exercício 6. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} E\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right), & \text{para } |x| < 1 \\ 0, & \text{para } |x| \geq 1 \end{cases}$$

é derivável para todo x real. Trace o gráfico dessa função.

6.3. POTÊNCIAS IRRACIONAIS

Na seção 1.4 definimos as potências a^r, onde a é um real positivo e r é um número racional. Até agora não atribuímos sentido a expressões como $2^{\sqrt{2}}$. Isso é o que faremos a seguir.

Definição. Se $a > 0$ e b é um número real qualquer, define-se

$$a^b = e^{b \log a}, \tag{1}$$

onde o segundo membro de (1) tem um sentido dado pela relação (9) da seção 6.2.

Observação. No caso de $b = r$, r um racional, a definição acima coincide com o sentido já dado a a^r, pois, usando a relação (19) da secção 6.1 temos

$$e^{r \log a} = \mathrm{E}(r \log a) = \mathrm{E}(\log a^r) = a^r,$$

onde se usou o fato de E ser a inversa do log para obter a última igualdade.

Propriedades:

(2) $$a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}, \quad a > 0$$

(3) $$(a^b)^c = a^{bc}, \quad a > 0$$

Demonstração de (2). Usando a relação (6) da seção 6.2:

$$\begin{aligned} a^b \cdot a^{b'} &= \mathrm{E}(b \log a)\mathrm{E}(b' \log a) = \mathrm{E}(b \log a + b' \log a) \\ &= \mathrm{E}((b + b')\log a) = a^{b+b'} \end{aligned}$$

Demonstração de (3). Primeiro, usando (1) e a relação (1) da seção 6.2 obtemos

(4) $$(e^x)^b = e^{b \log e^x} = e^{bx}$$

Agora, para o caso geral, usamos (1) e a seguir (4):

$$(a^b)^c = (e^{b \log a})^c = e^{bc \log a} = a^{bc}$$

6.4. A FUNÇÃO a^x

Para $a > 0$, podemos definir a função

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R}^+ \\ x &\to a^x = e^{x \log a} \end{aligned}$$

Em virtude de (1) da seção 6.3 temos:

$$f = \mathrm{E} \circ h$$

onde $h(x) = x \cdot \log a$. Logo, f e contínua, derivável e

$$f'(x) = \mathrm{E}'(h(x)) \cdot h'(x) = \mathrm{E}(x \log a) \cdot \log a,$$

isto é,

(1) $$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \log a$$

O gráfico de a^x é como na figura 39(a), se $a < 1$, e como na figura 39(b), se $a > 1$. Se $a = 1$, então, $a^x \equiv 1$.

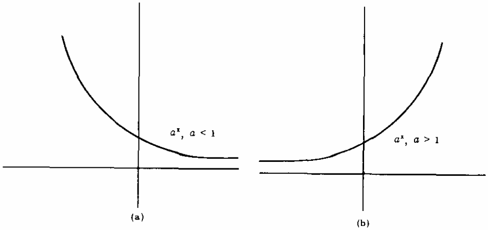


Fig. 39

6.5. A FUNÇÃO x^b

Seja b um número real dado. A função potência, x^b, pode agora ser definida:

$$g : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$
$$x \to x^b = e^{b \log x}$$

g é uma função composta: $g = \mathrm{E} \circ p$, onde $p(x) = b \log x$. Então, g é contínua e derivável, e

$$g'(x) = \mathrm{E}'(p(x)) \cdot p'(x) = \mathrm{E}(b \log x)\frac{b}{x}$$

i.e.
$$\frac{d}{dx}(x^b) = x^b \cdot \frac{b}{x} = bx^{b-1}, \; x > 0.$$

6.6. O NÚMERO e COMO LIMITE

A relação (12') da seção 6.1 para $x_0 = 1$ e $x = 1 + h$, $h > 0$, nos dá

(1) $$\frac{1}{1+h} \leq \frac{\log(1+h)}{h} \leq 1.$$

Usando (14') da seção 6.1, obtém-se uma desigualdade análoga para $h < 0$. Estas desigualdades implicam que a função

$$f(x) = \frac{1}{x}\log(1+x), \; x > -1, \; x \neq 0$$
$$f(0) = 1$$

é contínua na origem, pois, $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0_-} f(x) = 1$. Como

$$f(x) = \log(1+x)^{1/x}$$

e $f(x) \to 1$ quando $x \to 0$, segue-se que

$$\log(1+x)^{1/x} \to 1 \quad \text{quando} \quad x \to 0,$$

e daí

$$(1+x)^{1/x} \to e, \quad \text{quando } x \to 0.$$

Portanto,

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}.$$

Em particular

$$e = \lim_{n \to +\infty} (1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n \to +\infty} (1-\frac{1}{n})^{-n} = \lim_{n \to +\infty} (1+\frac{1}{n^2})^{n^2}.$$

Exercício 1. Prove as seguintes relações

(i) $$\lim_{n \to +\infty} (1+\frac{1}{n^2})^n = 1$$

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} (1+\frac{2}{n})^n = e^2$$

(iii) $$\lim \quad (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$$

Exercício 2. Mostre que, na desigualdade (1) da seção 6.6, podemos substituir os sinais $\leq$ por $<$. Tomando $h = \frac{1}{m}$ naquela desigualdade temos

$$\frac{m}{m+1} < \log(1+\frac{1}{m})^m < 1,$$

e, daí:

(*) $$(1+\frac{1}{m})^m < e < (1+\frac{1}{m})^{m+1}.$$

Escreva a desigualdade (*) para $m = 1, 2, \ldots, n-1$, e, por multiplicação das desigualdades resultantes, obtenha

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Obtem-se, assim a seguinte estimativa para o fatorial de n:

$$n^n e^{-n+1} < n! < n^{n+1} e^{-n+1}$$

Exercício 3. Mostre que $\lim_{n \to \infty} (\frac{n!}{n^n}) = 0$.

6.7. A CONSTANTE DE EULER-MASCHERONI

A sucessão

$$(1) \qquad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

converge e seu limite, C, é conhecido pelo nome de ***constante de Euler-Mascheroni.*** De fato, considere a função $f(x) = 1/x$ para $x > 0$. Segue-se que

$$(2) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1},$$

pois, o primeiro membro é uma soma inferior de $1/x$ no intervalo $[1, n]$ e o último membro é uma soma superior. (O leitor poderá fazer uma figura para se convencer da desigualdade (2). Logo, de (2), efetuando a integração, segue-se

$$(3) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$$

De (3) segue-se que $0 < a_n < 1$. Por outro lado, temos

$$(4) \qquad a_n - a_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1},$$

e como

$$\log(n+1) - \log n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx > \frac{1}{n+1},$$

segue-se que $a_n - a_{n+1} > 0$, ou seja, a sucessão $\{a_n\}$ é decrescente. Usando o teorema 1.4 concluímos que $\{a_n\}$ converge.

Observação. É um problema aberto determinar se a constante C é racional ou irracional.

7

RELAÇÕES ENTRE DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO

O problema inverso da derivação consiste em dada uma função $f: I \to \mathbf{R}$ definida em um intervalo I procurar uma função $F: I \to \mathbf{R}$ que seja derivável em I e tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Uma tal função F é chamada uma *primitiva* de f. Usa-se também as terminologias *integral indefinida* de f e *antiderivada* de f para designar uma tal função F. As questões centrais relativas ao problema inverso da derivação, as quais serão estudadas no presente capítulo, saõ:

(i) existência de uma primitiva;

(ii) se existem primitivas, o que se pode dizer sôbre o conjunto formado por tôdas elas.

7.1. A RESTRIÇÃO DE UMA FUNÇÃO INTEGRÁVEL

A integrabilidade de uma função é uma propriedade global, isto é, depende do comportamento da função em todo o intervalo de definição. Não é, pois, óbvio a priori que integrabilidade em um intervalo implica integrabilidade em um subintervalo. Observe que no caso da derivabilidade essa questão era imediata, dado o caráter local da propriedade.

Teorema 7.1. *Se $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ é uma função (limitada) integrável e $[c, d]$ é um intervalo fechado contido em $[a, b]$, então f é integrável em $[c, d]$. (Em outras palavras, a restrição $\tilde{f}$ de f a $[c, d]$, é integravel.)*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$ existe uma partição π do intervalo $[a, b]$ tal que

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) < \epsilon$$

aplicando o teorema 5.3. Se π' é a partição de $[a, b]$ formada pelos pontos de π e mais os pontos c e d (caso êles não estejam em π), temos, em virtude do teorema 5.1:

(1) $$S(f, \pi') - s(f, \pi') < \varepsilon.$$

Para fixar as idéias, seja $\pi' = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i = c < \ldots < < x_k = d < \ldots < x_n = b\}$.

Então,

(2) $$\sum_{j=i+1}^{k} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Seja $\tilde{\pi}$ a partição de $[c, d]$ obtida considerando apenas os pontos de π' que estão em $[c, d]$. Então, em virtude de (1) e (2) temos

(3) $$S(\tilde{f}, \tilde{\pi}) - s(\tilde{f}, \tilde{\pi}) < \varepsilon.$$

Portanto, usando o teorema 5.3, obtemos o resultado.

Teorema 7.2. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função integrável e seja $c \in (a, b)$. Então*

(4) $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demonstração. Pelo teorema 7.1 a função f é integrável em $[a, c]$ e também em $[c, b]$. Logo as expressões no segundo membro de (4) fazem sentido. Para demonstrar que se tem igualdade em (4) procedemos como se segue.

Seja π uma partição de $[a, b]$. Se c não pertence a π, formamos a partição π' adicionando o ponto c à partição π. Seja π_1 a partição de $[a, c]$ obtida considerando os pontos de π' contidos em $[a, c]$. Anàlogamente, seja π_2 a partição de $[c, b]$ obtida considerando os pontos de π' contidos em $[c, b]$. É claro que

(5) $$S(f, \pi) \geq S(f, \pi') = S(f_1, \pi_1) + S(f_2, \pi_2)$$

onde f_1 é a restrição de f a $[a, c]$ e f_2 é a restrição de f a $[c, b]$. De (5) segue-se

$$S(f, \pi) \geq \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2$$

para tôda partição π de $[a, b]$, e daí se segue

(6) $$\int_a^b f \geq \int_a^c f_1 + \int_c^b f_2.$$

Procedendo anàlogamente para as somas inferiores obtemos

$$\underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^c} f_1 + \underline{\int_c^b} f_2 \tag{7}$$

Finalmente, (6) e (7) dão o resultado (4).

O teorema 7.1 diz, essencialmente, que se uma função fôr integrável em um intervalo e partirmos tal intervalo em (um número finito de) subintervalos, as restrições dessa função a êsses subintervalos são integráveis. Agora apresentamos uma recíproca dêsse fato que pode ser útil em alguns problemas.

Teorema 7.3. *Se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é tal que f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$, onde $c \in (a, b)$, então f é integrável em $[a, b]$.*

Demonstração. Seja f_1 e f_2, respectivamente, as restrições de f a $[a, c]$ e $[c, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existem partições, π_1 de $[a, c]$ e π_2 de $[c, b]$, tais que

$$S(f_1, \pi_1) - s(f_1, \pi_1) < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad S(f_2, \pi_2) - s(f_2, \pi_2) < \epsilon/2, \tag{8}$$

em virtude da integrabilidade de f_1 e f_2. Consideremos agora a partição π de $[a, b]$ obtida tomando os pontos de π_1 e π_2. É claro que

$$S(f, \pi) = S(f_1, \pi_1) + S(f_2, \pi_2) \tag{9}$$

$$s(f, \pi) = s(f_1, \pi_1) + s(f_2, \pi_2) \tag{10}$$

As relações (8), (9) e (10) fornecem

$$S(f, \pi) - s(f, \pi) < \epsilon,$$

que prova a integrabilidade de f pelo teorema 5.3.

Exemplo. Uma função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é dita *seccionalmente contínua* se existe uma partição $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ de $[a, b]$ tal que f é contínua em cada subintervalo aberto (x_{j-1}, x_j), e as possíveis descontinuidades (que devem necessàriamente ocorrer em pontos de π) são de primeira espécie.

Pelos teoremas 5.4 e 7.3 vemos que tôda função seccionalmente contínua é integrável.

Exercício 1. Diz-se que um subconjunto A de **R** tem *conteúdo zero* se, dado $\epsilon > 0$, existe um número finito de intervalos abertos, $I_1, \ldots, I_k$, que cobrem A (i.e. $A \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$), e tais que $\sum_{j=1}^{k} l(I_j) < \epsilon$, onde $l(I_j)$ designa o comprimento do intervalo I_j. Mostre que todo conjunto finito de pontos de **R** tem conteúdo zero.

Exercício 2. Mostre que o conjunto $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ tem conteúdo zero.

Exercício 3. Seja $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, a função definida por

$$f(x) = (-1)^n \quad \text{para} \quad \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \cdot$$

Mostre que f é integrável.

Exercício 4. Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função limitada e seja D um subconjunto de $[a, b]$, que tem conteúdo zero. Suponhamos que f é contínua em todos os pontos do conjunto $[a, b]/D$, e que nos pontos de D f tem descontinuidades. Mostre que f é integrável em $[a, b]$. (Cf. exercício 1, seção 5.4.)

Exercício 5. Um subconjunto A de **R** tem *medida* zero, se dado $\epsilon > 0$, existe um número (não necessàriamente finito) de intervalos abertos $I_1, I_2, \ldots$, que cobrem A e tais que $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$, onde $l(I_n)$ designa o comprimento do intervalo I_n. Um conjunto é *enumerável* se êle pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto **N**. Mostre que qualquer subconjunto enumerável de **R** tem medida zero. Mostre que todo conjunto de conteúdo zero tem medida zero, e que a recíproca não é verdadeira.

(Pode-se demonstrar, cf. referência (10), que uma função limitada em $[a, b]$ é integrável se, e só se, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida zero.)

Exercício 6. Considere a função $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ irracional} \\ \frac{1}{q}, & \text{se } x = \frac{p}{q},\ p \text{ e } q \text{ primos entre si.} \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em todo x irracional, e descontínua em todo x racional. Mostre que f é integrável. (A integrabilidade de f pode ser demonstrada diretamente sem usar o teorema enunciado entre parêntesis no exercício 5.)

(Sugestão: Prove que, dados x irracional e q inteiro positivo, existe $\delta > 0$ tal que o intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ não contém nenhum racional de forma p/q.)

7.2. EXISTÊNCIA DE PRIMITIVAS

Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função (limitada) integrável. Em virtude do teorema 7.1, podemos definir uma função $F : [a, b] \to \mathbf{R}$, pela expressão

$$\text{(1)} \qquad F(x) = \int_a^x f$$

para todo x em $[a, b]$.

Teorema 7.4. *A função* $F(x)$ *definida em* (1) *é contínua em* $[a, b]$.

Demonstração. Consideremos pontos x_1 e x_2 em $[a, b]$ e tais que $x_1 < x_2$. Então

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_a^{x_2} f - \int_a^{x_1} f = \int_{x_1}^{x_2} f.$$

Se k é número real positivo tal que $|f(x)| \leq k$, para todo x em $[a, b]$, temos usando o teorema 5.11 e o corolário 5.4:

$$\text{(2)} \qquad |F(x_2) - F(x_1)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f\right| \leq \int |f| \leq k(x_2 - x_1).$$

A desigualdade (2) implica a continuidade de F.

Teorema 7.5. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função (limitada) integrável, e suponhamos que* f *seja contínua em um ponto* $x_0 \in (a, b)$. *Então, a função* F *definida em* (1) *é derivável em* x_0 *e* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstração. Tomemos a razão incremental de F em x_0, para $x > x_0$:

$$q(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left[\int_a^x f - \int_a^{x_0} f\right] = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f.$$

Queremos provar que, se (x_n) é uma sucessão decrescente e tendendo para x_0, então, $q(x_n) \to f(x_0)$. Sendo $f(x_0)$ uma constante, temos

$$q(x_n) - f(x_0) = \frac{1}{x_n - x_0}\int_{x_0}^{x_n} f - \frac{1}{x_n - x_0}\int_{x_0}^{x_n} f(x_0).$$

Usando o teorema 5.11, temos

$$(3) \qquad |q(x_n) - f(x_o)| \leq \frac{1}{x_n - x_o}\int_{x_o}^{x_n} |f - f(x_o)| .$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, em virtude de f ser contínua em x_o, segue-se que existe $\delta > 0$, tal que se $|x - x_o| < \delta$, então $|f(x) - f(x_o)| < \delta$. Tome n', tal que $x_n - x_o < \delta$ para $n \geq n'$. Logo de (3) obtemos

$$|q(x_n) - f(x_o)| \leq \frac{1}{x_n - x_o}\, \varepsilon\, (x_n - x_o) = \varepsilon,$$

para $n \geq n'$. Isso prova que $q(x_n) \to f(x_o)$, e, portanto, $q(x_o+) = f(x_o)$. Deixamos ao leitor a verificação, por um raciocínio análogo, que $q(x_o-) = f(x_o)$. Logo, $F'(x_o) = f(x_o)$, e o teorema fica provado.

Observação. Vê-se da demonstração que, se a função é contínua na extremidade a do intervalo (i.e. $f(a+) = f(a)$), então $F'_+(a) = f(a)$. Uma assertiva semelhante para a extremidade b.

Corolário 7.1. *Se a função f é contínua em todos os pontos de (a, b), então $F'(x) = f(x)$ para todo x em (a, b). (Isto é, a função F definida em* (1) *é uma primitiva de f.)*

Corolário 7.2. *Se a função $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é contínua para todo x em $[a, b]$, então $F'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$. (Entende-se que, para $x = a$, temos $F'_+(a) = f(a)$, e análogo para $x = b$.*

Observe que a continuidade de f em x_o é apenas uma condição suficiente para a existência da derivada $F'(x_o)$. O exemplo 2 abaixo mostra que a condição não é necessária. O exemplo 1 mostra que algum tipo de condição em x_o é necessária para a existência da derivada em x_o.

Exemplo 1. Seja $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 2 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tal f é òbviamente integrável, pois é seccionalmente contínua. Com um cálculo fácil, obtemos para a integral $F(x) = \int_0^x f(t)dt$:

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 2x - 1 & \text{para } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 1$, a função F não é derivável.

Exemplo 2. Seja $F : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x), & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 . \end{cases}$$

A função F é contínua, tem derivada em todos os pontos e

$$(4) \qquad \begin{cases} F'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x), x \neq 0 \\ F'(0) = 0 . \end{cases}$$

Entretanto, F' não é contínua para $x = 0$. No entanto, F' é integrável em $[-1, 1]$. Conclusão: a função $f = F'$ é limitada integrável não contínua e tem primitiva.

Uma comparação dos dois exemplos apresentados acima conduz a uma conclusão que pode parecer estranha. De fato, enquanto uma função aparentemente simples como a função escada não tem primitiva, a função definida em (4), a qual tem uma descontinuidade de 2ª espécie na origem, possui uma primitiva. Essa situação, porém, nada tem de acidental como mostra o corolário 7.3 abaixo. Antes de demonstrá-lo, mostraremos que a derivada de uma função, derivada esta que pode não ser contínua, tem uma propriedade em comum com as funções contínuas. Isto é, a derivada tem a propriedade do valor intermediário, cf. teorema 2.13.

A dificuldade de caracterizar as funções $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ que têm primitiva F em $[a, b]$ é uma das deficiências da integral de Riemann, aqui estudada. Êsse problema tem solução satisfatória dentro de uma teoria mais geral de integral, creada por Lebesgue no comêço dêste século. O leitor interessado encontrará a teoria da integral de Lebesgue nas referências (2) e (10).

Teorema 7.6. *Seja $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função real definida em un intervalo fechado $[a, b]$, a qual é derivável em todos os pontos de $[a, b]$. (Cf. seção 3.7 para a definição de função derivável em um intervalo fechado.) Então, a função $f' : [a, b] \to \mathbf{R}$ assume todos os valôres entre $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Demonstração. Demonstremos a proposição para o caso de $f'(a) < f'(b)$. O outro caso é demonstrado de modo análogo. Consideremos as funções auxiliares $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}$ e $\beta : [a, b] \to \mathbf{R}$ assim definidas:

$$\alpha(x) = \begin{cases} a, & \text{se } a \leq x \leq (a + b)/2 \\ 2x - b, & \text{se } (a + b)/2 \leq x \leq b \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 2x - a, & \text{se} \quad a \le x \le (a + b)/2 \\ b, & \text{se} \quad (a + b)/2 \le x \le b \end{cases}$$

(Trace os gráficos dessas funções.) É claro que $a \le \alpha(x) \le \beta(x) \le \le b$, e, portanto, pode-se definir a função

$$(5) \qquad g(x) = \frac{f(\beta(x)) - f(\alpha(x))}{\beta(x) - \alpha(x)}$$

para $x \in (a, b)$. É fácil ver que $g(a+) = f'(a)$ e $g(b-) = f'(b)$. Por conseguinte, definindo $g(a) = g(a+)$ e $g(b) = g(b-)$, a função g resulta contínua em $[a, b]$. Logo, dado λ, com $f'(a) < \lambda < f'(b)$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$(6) \qquad g(x_0) = \lambda,$$

de acôrdo com o teorema 2.13. Agora considere a função f restrita ao intervalo fechado $I = [\alpha(x_0), \beta(x_0)]$. Sendo f derivável em I, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que existe $c \in I$ tal que

$$(7) \qquad f(\beta(x_0)) - f(\alpha(x_0)) = f'(c)(\beta(x_0) - \alpha(x_0)).$$

Finalmente, de (5), (6) e (7) segue-se que $f'(c) = \lambda$, para um $c \in \in [a, b]$, pois $I \subset [a, b]$. A proposição está demonstrada.

Corolário 7.3. *Seja $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ uma função derivável em $[a, b]$. Então, $f': [a, b] \to \mathbf{R}$ não pode ter descontinuidades de 1ª especie.*

Demonstração. Assuma, por contradição, que f' tem uma descontinuidade de 1ª espécie em $c \in [a, b]$, e suponha que $f'(c+) - - f'(c-) = d > 0$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teremos

$$f'(x) < f'(c-) + d/3, \quad \text{se} \quad x \in (c - \varepsilon, c)$$

$$f'(x) > f'(c+) - d/3, \quad \text{se} \quad x \in (c, c + \varepsilon).$$

Portanto, a função $f': [c - \varepsilon, c + \varepsilon] \to \mathbf{R}$ não assume todos os valôres entre $f'(c-)$ e $f'(c+)$, o que contradiz o teorema 7.6.

Observação 1. Como se viu no exemplo 2 acima, a derivada pode ter descontinuidades de 2ª espécie.

Observação 2. Nesta seção estudámos a questão de existência de uma primitiva de uma dada função f, tentando construí-la como $\int_a^x f$. É natural perguntar se não há um outro processo de determinar uma primitiva. Na próxima seção, mostraremos que se existe uma primitiva de f, então ela é da forma $\int_a^x f +$ constante. Êsse resultado é o "teorema fundamental do cálculo".

7.3. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Inicialmente faremos uma observação sôbre a coleção das primitivas de uma dada função. Se F é uma primitiva de f, então, a função F + const é também uma primitiva. Provamos agora o seguinte resultado:

Teorema 7.7. *Se* F *e* G *são duas primitivas de uma função* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, *então,* F - G *é uma função constante.*

Demonstração. Como $F' = f$ e $G' = f$, então, $(F - G)' = 0$. Pelo teorema 3.10 segue-se que F - G é uma constante.

Observação. Êste teorema mostra que se conhecermos uma primitiva de f, então, tôdas as outras serão obtidas adicionando-se constantes a ela.

Vimos no parágrafo 7.2 que se $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ é contínua, então,

$$F(x) = \int_a^x f$$

é uma primitiva. Seja $G(x)$ outra primitiva de f. Então, existe uma constante k tal que $G(x) = k + F(x)$. Logo,

$$G(x) = k + \int_a^x f.$$

Tomando os valôres de G em a e b temos

$$G(a) = k, \quad G(b) = k + \int_a^b f.$$

Daí se segue que

(1) $$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Resumindo, (1) expressa o seguinte: se f é uma função *contínua* em $[a, b]$ e se G é uma primitiva qualquer de f, então, a integral de f em $[a, b]$ é $G(b) - G(a)$. Tal resultado é também válido mesmo se f *não é contínua,* mas apenas integrável. Êsse é o conteúdo do *teorema fundamental do cálculo* que damos a seguir.

Teorema 7.8. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *uma função (limitada) integrável. Se* G *é uma primitiva qualquer de* f, *então,*

(2) $$\int_a^b f = G(b) - G(a).$$

Observação. Êste teorema explicita a íntima relação entre o cálculo integral e o cálculo diferencial. De um lado temos a integral e do outro temos uma primitiva que nada mais é que uma solução da equação diferencial $y' = f(x)$. Talvez não seja demasiado explicar que na equação diferencial $y' = f(x)$, a função $f(x)$ é dada e a função $y = y(x)$ é a incógnita; uma função $y(x)$ é solução da equação diferencial $y' = f(x)$ se ela fôr derivável em (a, b) e sua derivada y' fôr igual a f.

Demonstração do teorema 7.8. A idéia é aplicar o teorema 5.12 que dá uma aproximação da integral de f por somas de Riemann. Seja $\pi = \{x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. A função G é contínua em $[x_{j-1}, x_j]$ e derivável em (x_{j-1}, x_j) para $j = 1, 2, \ldots, n$. Logo, aplicando o teorema do valor médio, temos que existe $t_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tal que $G(x_j) - G(x_{j-1}) = G'(t_j)(x_j - x_{j-1})$. Tomando o somatório de 1 a n e lembrando que $G' = f$ em (a, b) temos

$$G(b) - G(a) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)(x_j - x_{j-1}). \tag{3}$$

146

Portanto se escolhermos uma sucessão de partições $\{\pi_k\}$ de $[a, b]$ tais que $\|\pi_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$, teremos que as somas de Riemann correspondentes, no segundo membro de (3), convergem a $\int_a^b f$.

Como o primeiro membro de (3) independe da particular partição, o teorema fica provado.

Primitivas de algumas funções. Usaremos a notação $\int f$ para designar uma primitiva da função f. Usando resultados dos capítulos 3, 4 e 6, temos

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1, \text{ qualquer } x \text{ real},$$

$$\int x^{-1} = \log x + c, \quad x > 0.$$

$$\int \cos x = \operatorname{sen} x + c,$$

$$\int \operatorname{sen} x = -\cos x + c.$$

Usando essas primitivas podemos obter primitivas de outras funções. Em verdade, pode-se desenvolver um extensivo cálculo de primitivas. Dado o objetivo do presente trabalho, não entraremos nesse problema. O leitor, que não seja familiar com êsse assunto, poderá estudá-lo em uma das referências seguintes (1), (8), (11) ou (12).

Da aplicabilidade do teorema 7.8. O cálculo da integral de uma função $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ pode ser feito, em virtude do teorema 7.8, usando uma primitiva G de f.

Exemplos: (i) $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

(ii) $\int_0^{\pi} \cos x dx = \operatorname{sen} \pi - \operatorname{sen} 0 = 0.$

(iii) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$

7.4. INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Nesta seção consideramos a extensão do conceito de integral para funções definidas em intervalos infinitos, bem como para funções ilimitadas.

Definição 1. A função $f: [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ é *integrável* em $[a, +\infty)$ se a restrição de f a cada intervalo (finito) $[a, b]$ é integrável e se o seguinte limite existe:

(1) $$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f dx.$$

Quando f é integrável, o valor do limite (1) é chamado a *integral* de f em $[a, +\infty)$ e se escreve

(2) $$\int_a^{\infty} f dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f dx.$$

Observação. Está implícito na definição que f é limitada em cada intervalo $[a, b]$, isto é, para cada $b > a$, existe um número M_b tal que $|f(x)| \le M_b$ com $x \in [a, b]$. Dê um exemplo para mostrar que M_b pode tender para $+\infty$, quando $b \to +\infty$.

Exemplo 1. $f(x) = x^{-2}$ para $x \ge 1$. Temos

$$\int_1^b x^{-2} dx = -x^{-1} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$

E daí, fazendo $b \to +\infty$, obtem-se $\int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1.$

Exemplo 2. $f(x) = x^{-1}$ para $x \geq 1$. Temos:

$$\int_1^b x^{-1} dx = \log x \Big|_1^b = \log b .$$

Como $\log b \to +\infty$, quando $b \to +\infty$, concluímos que x^{-1} não é integrável em $[1, +\infty)$. Entretanto, em casos como êste, dizemos que a integral é infinito, e escrevemos

$$\int_1^\infty x^{-1} dx = +\infty .$$

Exemplo 3. $f(x) = x^2$, para $x \geq 0$, não é integrável, mas $\int_1^\infty x^2 dx = +\infty$.

De modo análogo, definimos a integrabilidade de uma função $f : (-\infty, a] \to \mathbf{R}$. Uma função $f : (-\infty, +\infty) \to \mathbf{R}$ é *integrável* se suas restrições a $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$ são integráveis, e, neste caso, a *integral* de f é definida por

(3) $$\int_{-\infty}^\infty f dx = \int_{-\infty}^0 f dx + \int_0^\infty f dx.$$

Exemplo 4. A função $f(x) = x$, para todo x real, não é integrável.

Exemplo 5. A função $f(x) = e^{-x^2}$ para todo x real é integrável. Em virtude da simetria da função $f(x)$ basta mostrar que ela é integrável em $[0, \infty)$. Como e^{-x^2} é contínua, resta provar que o limite de $\int_0^b e^{-x^2} dx$ existe quando $b \to +\infty$. Ou ainda, é suficiente provar que $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b e^{-x^2} dx$ existe. É fácil ver que

$$\int_1^b e^{-x^2} dx < \int_1^b e^{-x} dx,$$

e daí o resultado se segue. Observe que não foi necessário calcular o valor da integral $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$, para provar que a integral existe.

Um outro tipo de integral imprópria ocorre quando a função é ilimitada na vizinhança de um ponto. Exemplo: $f(x) = 1/\sqrt{x}$, para $x \in (0, 1]$.

Definição 2. A função $f : (a, b] \to \mathbf{R}$ é integrável em $(a, b]$ se a restrição de f a cada intervalo de forma $[a + \epsilon, b]$, $\epsilon > 0$, é integrável, e se o limite de $\int_{a+\epsilon}^{b} f dx$ existe, quando $\epsilon \to 0$. Se a função é integrável em $(a, b]$, o valor dêsse limite é chamado a *integral* de f e se escreve:

$$\int_a^b f dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f dx.$$

Observação. Está implícito nesta definição que f é limitada em qualquer intervalo $[a + \epsilon, b]$ com $\epsilon > 0$. Como mostra o exemplo acima, êsse fato não implica que f seja limitada em $(a, b]$.

Exemplo 6. $f(x) = 1/\sqrt{x}$, para $x \in (0, 1]$, é integrável. De fato,

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2x^{1/2}\Big|_{\epsilon}^{1} = 2(1 - \sqrt{\epsilon}),$$

para $0 < \epsilon \leq 1$. Logo, fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos

$$\int_0^1 x^{-1/2} dx = 2.$$

Exemplo 7. $f(x) = 1/x$, para $x \in (0, 1]$, não é integrável. De fato

$$\int_{\epsilon}^{1} x^{-1} dx = \log x\Big|_{\epsilon}^{1} = -\log \epsilon .$$

Neste caso, o limite da integral é $+\infty$, quando $\epsilon \to 0$. Portanto, $1/x$ em $(0, 1]$ não é integrável. Entretanto, convencionamos dizer que $\int_0^1 x^{-1} dx = +\infty$.

Exercício 1. Estude a integrabilidade da função

$$f(x) = x^{\alpha}, \quad \text{para} \quad x \geq 1.$$

Considere as várias possibilidades para o parâmetro real α.

Exercício 2. Mesma questão para

$$g(x) = x^{\alpha}, \quad \text{para} \quad 0 < x \leq 1.$$

Exercício 3. Mesma questão para as funções

(i) $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad 0 \leq x < +\infty$

(ii) $f(x) = (\sin x)/x, \quad 0 < x < +\infty$

(iii) $f(x) = (\sin x)/x^2, \quad 1 \leq x < +\infty$.

Exercício 4. (Teste da integral para a convergência de séries numéricas.) Seja $f : [1, \infty) \to \mathbf{R}$ uma função positiva e decrescente em $[1, \infty)$. Prove que f é integrável em $[1, \infty)$, (i.e. $\int_1^\infty f dx < \infty$) se, e só se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge. (Sugestão: trace uma figura e observe que $f(n)$ é a área do retângulo com vértices: $(n-1, 0)$, $(n, 0)$, $(n, f(n))$, $(n-1, f(n))$. Para demonstrar a outra implicação, observe que $f(n)$ é a área do retângulo com vértices $(n, 0)$, $(n+1, 0)$, $(n+1, f(n))$, $(n, f(n))$.)

Exercício 5. Use o exercício anterior para estudar a convergência das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$.

BIBLIOGRAFIA

(1) BERS, L. Calculus, Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nova York (1969).

(2) HEWITT, E. e STROMBERG, D. Real and Abstract Analysis, Springer, Berlim (1965).

(3) JOHNSON, R. e KIOKEMEISTER, F. Calculus with Analytic Geometry, Allyn & Bacon, Inc., Boston, Mass. (1960).

(4) KLINE, M. (ed.) Mathematics in the Modern World, W. H. Freeman & Co., San Francisco, Calif. (1968). (Êste livro contém 48 artigos sôbre os mais variados temas em matemática, escritos por matemáticos famosos e publicados na revista *Scientific American.*)

(5) LANG, S. First Course in Calculus.

(6) LANG, S. Analysis I, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. (1968).

(7) LIMA, E. Topologia dos Espaços Métricos, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janiero, Brasil (1953).

(8) MOISE, E. Calculus, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass. (1967).

(9) NACHBIN, L. Conjuntos e Funções, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janiero, Brasil (1968).

(10) RUDIN, W. Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill Book Co., Nova York, 2a. edição (1964).

(11) SEELEY, R. Calculus of One Variable, Scott, Foresman & Co., Chicago, Ill. (1968).

(12) THOMAS, G. Cálculo, Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, Brasil, 2 vols. (1953). (A edição americana foi publicada pela Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Massachusetts.)

(13) Kohner Bros. Inc. Hi-jinx, quebra-cabeças.

COLEÇÃO DE MONOGRAFIAS CIENTÍFICAS

Publicadas

Série de matemática

- N° 1. La Revolución en las Matemáticas Escolares, pelo Conselho Nacional de Professôres de Matemática dos Estados Unidos da América.
- N° 2. Espacios Vectoriales y Geometría Analítica, por Luis A. Santaló.
- N° 3. Estructuras Algebraicas, por Enzo R. Gentile.
- N° 4. Historia de las Ideas Modernas en la Matemática, por José Babini.
- N° 5. Algebra Lineal, por Orlando E. Villamayor.
- N° 6. Álgebra Linear e Geometria Euclidiana, por Alexandre Augusto Martins Rodrigues.
- N° 7. El Concepto de Número, por César A. Trejo.
- N° 8. Funciones de Variable Compleja, por José I. Nieto.
- N° 9. Introducción a la Topología General, por Juan Horváth.
- N° 10. Funções Reais, por Djairo G. de Figueiredo.

Série de física

- N° 1. Concepto Moderno del Núcleo, por D. Allan Bromley.
- N° 2. Panorama de la Astronomía Moderna, por Félix Cernuschi e Sayd Codina.
- N° 3. La Estructura Electrónica de los Sólidos, por Leopoldo M. Falicov.
- N° 4. Física de Partículas, por Igor Saavedra.
- N° 5. Experimento, Razonamiento y Creación en Física, por Félix Cernuschi.

Série de química

- N° 1. Cinética Química Elemental, por Harold Behrens Le Bas.
- N° 2. Bioenergética, por Isaias Raw e Walter Colli.
- N° 3. Macromoléculas, por Alejandro C. Paladini e M. Burachik.
- N° 4. Mecanismos de las Reacciones Orgánicas, por Jorge Brieux.
- N° 5. Elementos Encadenados, por Jacobo Gómez Lara.
- N° 6. Enseñanza de la Química Experimental, por Francisco Giral.

Série de biología

N° 1. La Genética y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por José Luis Reissig.
N° 2. Bases Ecológicas de la Explotación Agropecuaria en la América Latina, por Guillermo Mann F.
N° 3. La Taxonomía y la Revolución en las Ciencias Biológicas, por Elías R. de la Sota.
N° 4. Principios Básicos para la Enseñanza de la Biología, por Oswaldo Frota-Pessoa.
N° 5. A Vida da Célula, por Renato Basile.
N° 6. Microorganismos, por J. M. Gutiérrez-Vázquez.

Em preparação

Série de matemática

Introducción a las Probabilidades y a la Inferencia Estadística, por Luis A. Santaló.
Introducción a la Lógica Matemática, por Gregorio Klimovsky.

Série de física

Fôrças Nucleares, por Oscar Sala.
Radiación Cósmica, por Gastón Mejía e Magín Zubieta.
Semiconductores, por George Bemski.
Aceleradores de Partículas, por Fernando Alba Andrade.
Física Cuántica, por Onofre Rojo Asenjo e H. McIntosh.

Série de química

Temas Modernos de Química Inorgánica, por Rubén Levitus.
Complejos, por Carlos Andrade.
Fotoquímica de Moléculas Sencillas, por Ralf D. Penzhorn.

Série de biología

Hereditariedade Humana, por P. H. Saldanha.
Biosíntesis de Proteínas y el Código Genético, por Jorge E. Allende.
Los Virus, por Enriqueta Pizarro.
Elementos de Inmunología e Inmunoquímica, por Sergio Estrada-Parra e Félix Córdoba.
Fundamentos Modernos de la Microbiología, por Norberto J. Palleroni.

Nota. As pessoas interessadas em adquirir estas monografias devem dirigir-se à Oficina de Vendas e Promoção, União Pan-Americana, Washington, D. C., 20006.